IOAN I. PLĂCINŢEANU

TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE
ŞI
METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

3

EDITURA TEHNICĂ

Scanned with OKEN Scanner

Dr. IOAN I. PLACINTEANU

TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE
ŞI
METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAŞI

83.063

EDITURA TEHNICĂ
BUCUREŞTI 1957

Nu se împrumută acasă

Scanned with OKEN Scanner

În amintirea părinților mei
Ecaterina (n. Benclidy) și
Dr. Ioan Plăcințeanu

Prefață

Expunerea de față tratează una dintre problemele matematicilor aplicate, avînd cea mai directă și mai strînsă legătură cu practica în foarte multe și diverse ramuri de activitate: tehnică (producție în masă, lucrul la mai multe mașini-unelte, telefonie etc.), economie, artă militară, geodezie și topografie, astronomie, industrie textilă, teoria tirului, precizia mecanismelor etc.

Este binecunoscut că nu există operație experimentală de măsurare sau de observație (care este în esență tot o măsurare) neafectată de erori, iar problema esențială care se pune este, pe de o parte, să se găsească o metodă de lucru cît mai precisă, iar pe de altă parte, să se stabilească gradul acestei precizii pentru măsurătorile în teren.

Calculul erorilor, teoria probabilităților și metoda celor mai mici pătrate sînt dezvoltări matematice care au rezultat în cea mai mare măsură din practică, din studiul fenomenelor obiective ale lumii materiale, atît în științele naturii cît și în științele sociale.

Cu toate că, din punctul de vedere al ordinii matematice, această succesiune nu pare îndreptățită, am preferat totuși din motive didactice, să expun calculul erorilor înaintea teoriei probabilităților: calculul erorilor este mai ușor accesibil pentru cititor, rămînînd ca justificarea unor afirmații (de altfel, foarte puține) din această parte, prin teoria probabilităților, să fie recuperată ulterior. În al doilea rînd, expunerea de față nu-și are centrul de greutate pe teoria probabilităților, pentru care există excelentele tratate ale

Scanned with OKEN Scanner

autorilor romîni O. Onicescu și Gh. Mihoc, ci pe calculul erorilor și metoda celor mai mici pătrate — capitolul de probabilități fiind introdus pentru necesitatea justificării teoretice a unora dintre problemele expuse în prima și ultima parte.

Există și unele probleme utile lucrărilor în teren și în producție, dar care nu sînt și nu și-au găsit locul de a fi tratate în această lucrare, însă toate elementele necesare pentru înțelegerea lor se găsesc dezvoltate amănunțit în expunerea de față.

AUTORUL

Scanned with OKEN Scanner

I. TEORIA ERORILOR DE MĂSURARE

Capitolul I

Erori de măsurare. Clasificare

§ 1. Considerații generale

Scopul unei cercetări științifice constă în descoperirea legilor care dirijează fenomenele naturale, spre a le pune în slujba omului. Pentru aceasta, este nevoie să se îmbine cercetarea științifică și aplicația practică, respectiv tehnică, fără de care orice speculație abstractă devine sterilă.

Pentru a putea realiza acest program, prima condiție în alegerea mărimilor fizice (înțelegînd prin aceasta și mărimile care intervin în tehnică și în practică) este ca ele să fie *măsurabile*. Această condiție, după cum se demonstrează în studiul mărimilor, este identică cu condiția de *sumabilitate*, pentru mărimi de aceeași speță.

Operațiile de măsurare sînt și ele de două feluri: *măsurători directe* și *măsurători indirecte*. În expunerea problemei noastre vom trata rezultatele ambelor feluri de măsurători, fără a intra în analizarea noțiunii însăși de măsurare [1].

Cel care se ocupă cu măsurători de orice natură face constatarea nedesmințită că, oricît de îngrijit ar fi ele executate, nu se pot obține rezultate perfect riguroase; adică orice măsurătoare produce un rezultat afectat de erori inerente.

Există două mijloace prin care se poate verifica exactitatea unei măsurători:

a) se repetă operația de mai multe ori și se verifică dacă rezultatele coincid; experiența ne arată că rezultatele diferă totdeauna între ele;

---

[1] Asupra acestei chestiuni se poate consulta: I. Plăcinteanu, „Mărimi fizice și unitățile lor de măsură", Revista Militară Tehnică, Anexă nr. 1, 1954.

Scanned with OKEN Scanner

b) se măsoară mărimi diferite, care stau însă în anumite relaţii cunoscute anticipat (formule sau ecuaţii), şi se verifică dacă rezultatele măsurătorilor satisfac relaţiile date. De exemplu, măsurăm unghiurile unui triunghi plan oarecare şi verificăm dacă suma valorilor obţinute este egală cu 180°.

Se constată, nedesmințit, că oricît de îngrijit s-ar executa astfel de măsurători nu se va găsi de fiecare dată același rezultat.

Cu toate că aceste insuficiențe ale măsurătorilor sînt de neînlăturat, trebuie remarcat că erorile produse nu trebuie să depășească anumite limite care se determină prin calcul. Deci, diferențele dintre măsurători trebuie să fie *suficient de mici*, admițînd că operatorul a pus un maxim de îngrijire și îndemînare în efectuarea lor. Înainte de a se fi descoperit metodele de compensare a erorilor, metode pe care le vom expune în cele ce urmează, pe vremea cînd se proceda la triangulaţie pe teren şi apoi se constata că nu se închide rețeaua, după încercări de reluare a măsurătorilor și după ajustări arbitrare, ultima soluţie era: „trimitem un operator pe teren care să măsoare unghiul cu pricina atît timp pînă ce acest unghi va deveni cu 3" mai mare sau mai mic, după nevoie". Asigurarea preciziei măsurătorilor consta atunci în dispoziția legală ca operatorii să depună jurămînt că „vor măsura cu toată precizia".

M. F. Malikov precizează: „eliminarea erorilor constituie o problemă de bază a tehnicii măsurătorilor precise". Soluționarea acestei probleme deschide perspective largi pentru obținerea unor rezultate din ce în ce mai riguroase. Totuși, *mărimea preciziei nu poate merge dincolo de orice limită.* Teoretic, vom ajunge la o limită cînd însăși noțiunea de mărime măsurată își va pierde sensul. De exemplu, este ușor să constatăm că, oricît de puțin s-ar deosebi între ele rezultatele măsurării lungimii unei *cale* — lungime determinată prin distanța dintre două fețe plane, riguros paralele și polizate cu foarte mare atenție — abaterile dintre diferitele valori obținute nu pot fi mai mici decît ordinul de mărime al dimensiunilor moleculare. Pentru astfel de dimensiuni dispare însăși noțiunea de muchie pentru o cală, noțiune care implică o discontinuitate aparentă. În consecință, dispare însăși noțiunea de lungime a calei etalon.

§ 2. Erori grosolane (greșeli)

Dacă diferența dintre rezultatul unei măsurători individuale și șirul celorlalte rezultate este prea mare, adică iese din limitele admisibile pentru aceste diferențe, zicem că avem de-a face cu o *eroare grosolană* sau *o greșeală*. Aceste erori pot proveni dintr-o

neatenție la lucru, din defecte în construcția sau funcționarea aparatelor, din alegerea necorespunzătoare a metodelor de lucru, din întrebuințarea unei metode de calcul inexacte, din neglijarea unui izvor puternic de erori continue, de exemplu: dacă operatorul citește greșit pe stadie, fie mai spre dreapta, fie mai spre stînga, acest operator va găsi rezultate cu erori grosolane pentru lungimile determinate. În orice caz, cînd apar astfel de erori grosolane se procedează la refacerea măsurătorilor respective prin operații de control în număr foarte mic. Evidențierea greșelilor rezultă din tabela tuturor rezultatelor găsite.

În considerațiile care urmează se face abstracție de erorile grosolane care pot fi excluse anticipat din calcul.

Așadar, în general, erorile se datoresc unor cauze diverse: imperfecția organelor vizuale ale observatorului, imprecizia dispozitivelor de măsurare, influențele exterioare din timpul operației de măsurare, erori comise la calculele efectuate în timpul măsurătorilor, erori provocate de folosirea nejustă a mijloacelor de măsurare etc.

§ 3. Erori sistematice

Anumite erori apar distribuite în același sens sau rămîn constante în condiții identice de operație, astfel încît nu pot fi eliminate prin repetarea operației, dimpotrivă ele se acumulează; de exemplu, un lanț este mai scurt sau mai lung față de valoarea indicată pe el (valoarea nominală); rezultă că lungimile măsurate cu el vor fi totdeauna prea mari sau prea mici. Presupunem că un lanț de 20 m este mai scurt sau mai lung cu mărimea α; atunci o lungime l, măsurată cu acest lanț, va apare mai mare sau mai mică cu mărimea $\frac{\alpha}{20} l$, mărime care constituie eroarea măsurătorii respective.

O astfel de eroare sistematică este proporțională cu lungimea care trebuie măsurată și deformează rezultatele totdeauna în același sens.

În mod analog, dacă axa optică a lunetei unei nivele nu este riguros paralelă cu axa nivelei, eroarea de citire pe mină va fi proporțională cu distanța de la lunetă la mină. Avem tot o eroare sistematică.

Dacă axa de suspensie a unei lunete meridiane nu este riguros orizontală, erorile care decurg din observațiile cu un astfel de instrument pot fi calculate din formulele respective pentru instrumentele optice, ceea ce se face în astronomie.

Acestea sînt *erori sistematice instrumentale*. Influența lor asupra măsurătorilor trebuie și poate să fie cunoscută și eliminată, sau redusă la un minim nesupărător.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru eliminarea unor astfel de erori instrumentale, uneori nu este nevoie de un calcul special, ci se pot utiliza procedee tehnice convenabile; de exemplu, eroarea de citire pe o mîră cu o lunetă a cărei axă nu este riguros paralelă cu nivela se elimină din rezultat dacă nivelarea se face exact de la mijloc. De asemenea, erorile de colimaţie, în măsurarea unghiurilor, se pot elimina dacă citirea se face o dată normal şi o dată cu luneta dată peste cap.

Tot erori sistematice pot fi produse din influenţele exterioare, cum sînt temperatura, curbura pămîntului, refracţia atmosferică, diferenţele de nivel etc.

Este evident că şi organele de percepţie ale observatorului pot constitui surse de erori sistematice, fie dintr-un defect de vedere, fie dintr-un defect de orientare, fie din neatenţie. Astfel de erori sistematice personale trebuie determinate anticipat şi eliminate din calcul. În astronomie, de exemplu, se construieşte ceea ce se numeşte „ecuaţia personală" a observatorului, care permite eliminarea erorilor personale.

§ 4. Erori întîmplătoare

Pe lîngă erorile grosolane (greşeli) şi erorile sistematice de orice natură, erori care pot fi evitate prin corecţii introduse în calcul sau prin verificarea şi repararea aparatelor sau instalaţiilor de măsurat, mai există erori inerente operaţiilor de măsurare şi care nu pot fi eliminate sau evitate, aşa-numitele *erori întîmplătoare* sau *erori accidentale*, pentru care s-a propus şi denumirea de *erori incidentale*.

Dacă repetăm măsurătorile în condiţii identice, cu cea mai mare atenţie şi grijă în execuţie, erorile întîmplătoare apar inevitabile. Ele se caracterizează prin faptul că sînt cu totul diferite între ele ca mărime şi ca semn, fără ca din înşirarea lor într-o tabelă să rezulte o regulă sistematică de ordonare.

Cauzele acestor erori sînt variate şi multiple. Ele pot fi de aceeaşi natură ca şi erorile sistematice, de exemplu, cauze exterioare şi personale, ca: variaţiile de omogeneitate a aerului, de luminozitate a obiectului, fluctuaţiile etaloanelor de măsură, imprecizia construirii aparatelor de măsurat şi inexactitatea verificării lor, imprecizia organelor de percepţie etc. Dar caracterul specific al acestor erori — spre deosebire de erorile sistematice şi grosolane — este, după cum am spus, distribuţia lor complet întîmplătoare, atunci cînd provin de la acelaşi observator şi de la acelaşi instrument. Din această cauză ele nu pot fi eliminate, anticipat, din calcule şi nici nu pot fi evitate în operaţiile de măsurare. Singura condiţie pe care

Scanned with OKEN Scanner

trebuie să o satisfacă observatorul este să reducă influența acestor erori la minim, prin atenția și grija deosebită pe care trebuie să o arate tot timpul cît efectuează măsurătorile. Presupunem satisfăcută această condiție.

Mai tîrziu, vom da o definiție riguroasă a noțiunii de eroare întîmplătoare, legată de noțiunea probabilistă de *eveniment întîmplător*. În considerațiile care urmează, facem abstracție de erorile grosolane, pe care le considerăm înlăturate prin operații anticipate de control, și de erorile sistematice, care fac un obiect de studiu special, cum este teoria instrumentelor de măsurat, unde influența acestor erori este precizată prin calcul și apare sub formă de formule de corecție.

Ne mărginim, așadar, la studiul erorilor întîmplătoare. O dată ce am ajuns la constatarea și concluzia că nu este posibil să obținem prin măsurători *valoarea adevărată* a unei mărimi, ne mulțumim cu un rezultat mai modest, anume, să obținem în condiții date cea mai bună valoare acceptată pentru mărimea considerată, adică *valoarea cea mai probabilă*. În acest scop, cel dintîi lucru pe care avem să-l precizăm este acela de a enunța exact caracteristicile, respectiv proprietățile erorilor întîmplătoare.

§ 5. Caracteristicile erorilor întîmplătoare în măsurători

Presupunem că măsurătorile se fac cu instrumente lipsite de erori sistematice.

Din studiul rezultatelor măsurătorilor, ale căror valori apar distribuite complet dezordonat, cu abateri între limite suficient de mici, se constată că, atunci cînd *numărul* de măsurători este *suficient de mare*, rezultatele care conțin numai erori întîmplătoare se distribuie totuși după anumite *legi statistice*.

Studiul problemelor statistice formează discipline speciale la care au contribuit cei mai mari savanți mondiali. Această problemă nu face deocamdată obiectul expunerii noastre.

Revenim, deci, la chestiunea propusă. Șirul erorilor întîmplătoare este definit în condiții date, prin următoarele caracteristici:

a) *principiul limitativ:* erorile întîmplătoare nu pot depăși, în valoare absolută, o anumită limită; această proprietate caracterizează condițiile de măsurare precisă;

b) *principiul cauzalist:* erorile cu o valoare absolută mică sînt mai numeroase decît erorile cu o valoare absolută mare; specific legii valorii erorilor;

Scanned with OKEN Scanner

c) *principiul distribuitiv:* erorile pozitive (cu semnul +) sînt tot atît de frecvente ca şi erorile negative (cu semnul —); aceasta constituie proprietatea de compensare prin alternanţă;

d) *principiul probabilist:* media aritmetică a erorilor Δ'_i, datorite unor măsurători executate cu acelaşi grad de încredere asupra uneia şi aceleiaşi mărimi, tinde către zero cînd numărul de măsurători tinde către infinit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n}{n} = 0,$$

deoarece seria erorilor reale raportate la numărul erorilor este nu numai convergentă, ci tinde ea însăşi către zero, după cum se justifică în teoria probabilităţilor.

Exemplu. Fie un şir de 40 erori întîmplătoare, ordonate după valoarea lor absolută:

+ 0,02	— 0,25	+ 0,66	— 1,15
— 0,02	— 0,28	+ 0,67	+ 1,18
— 0,05	— 0,50	+ 0,71	+ 1,27
+ 0,15	+ 0,50	— 0,72	— 1,28
— 0,15	— 0,50	+ 0,82	+ 1,29
+ 0,15	— 0,52	— 0,83	— 1,30
— 0,17	— 0,56	— 0,91	+ 1,45
+ 0,17	— 0,58	+ 0,95	— 1,55
— 0,22	+ 0,65	+ 0,98	+ 1,65
+ 0,25	— 0,66	+ 1,12	— 2,42

Simpla observare de ansamblu a numerelor de mai sus ne arată că avem de-a face cu erori întîmplătoare. În adevăr, nu se distinge nici o regulă de succesiune atît în ceea ce priveşte mărimea lor, cît şi în ceea ce priveşte semnul. Ordonarea după valorile absolute crescătoare a fost aleasă, după cum am specificat, pentru uşurinţa discuţiei. Eroarea maximă conţinută de şir este — 2,42; ea constituie în valoare absolută o *limită* acceptabilă. Nu apar erori grosolane.

Numărul erorilor care nu sînt în valoare absolută mai mari decît unitatea este 29 din 40; deci avem mai multe erori mici în valoare absolută decît mari. Apoi, avem 19 erori pozitive şi 21 negative; suma erorilor pozitive (+ 14,64) este foarte apropiată de suma erorilor negative (— 14,62).

Media aritmetică: $+\frac{0{,}02}{40} = +0{,}0005$ este foarte aproape de zero.

După cum vom vedea mai tîrziu, pe baza acestor proprietăţi putem aprecia „precizia" măsurătorilor respective, precum şi valoarea cea mai probabilă a mărimii supusă determinării respective, cu erorile care figurează în tabela precedentă.

Scanned with OKEN Scanner

§ 6. Operația de măsurare. Valoarea de referință

Numin „măsurare" acel proces de cunoaștere care constă în compararea pe cale fizică experimentală a unei mărimi date cu una dintre submultiplele sale, luată ca unitate de măsură. Această operație fizică se exprimă matematic, pentru mărimi scalare, prin formula:

$$M = m\,[M], \tag{1}$$

în care M este o mărime fizică de o speță dată, deci o mărime concretă, $[M]$ un submultiplu al lui M, de aceeași speță, luat ca unitate de măsură, iar m un număr oarecare. Este de remarcat faptul că membrul al doilea al ecuației (1) este un produs de doi factori caracteristici distincți: unul *cantitativ* m, factor numeric, iar celălalt *calitativ* $[M]$, care definește speța mărimii rezultante M, factor luat ca unitate de măsură *presupusă cunoscută riguros*, fără nici o eroare, ceea ce este deosebit de important în interpretarea operației de măsurare definită prin relația (1). Rezultatul M se mai numește *măsură* sau *valoare* a mărimii considerate, iar rezultatul numeric al operației de măsurare m este numit *valoare numerică*.

Termenul de „măsură" este folosit aici, prin urmare, într-un sens mai larg decît în terminologia respectivă din metrologie. Noțiunea de „măsură a mulțimilor de puncte" ocupă un rol esențial în analiza matematică și în probabilitate. Considerăm totuși că termenul *valoare* este mai adecvat noțiunii definită prin ecuația (1).

Trebuie reținut și bine specificat faptul că operația definită mai sus constituie procesul de măsurare *directă*, în ipoteza cunoașterii *exacte* a unității de măsură $[M]$ care poate fi concretizată prin ceea ce se numește *măsură-tip*, *măsură-etalon* sau *măsură-model*.

Teoretic, repetarea operației de măsurare trebuie să reproducă riguros aceeași valoare numerică m, ceea ce, după cum se dovedește experimental, nu are loc decît excepțional. Valoarea M astfel obținută, printr-o operație de măsurare directă cu o măsură luată ca unitate lipsită de eroare, se numește *valoare reală* sau *valoare adevărată*, devenind pentru studiul erorilor ceea ce se numește o *valoare de referință*. Este evident că rareori se va putea determina o valoare de referință care să reprezinte valoarea reală, exactă, a mărimii măsurate. Un exemplu tipic îl oferă suma unghiurilor unui triunghi plan, care are ca valoare adevărată, teoretică, 180°. În general, însă, o astfel de valoare de referință trebuie definită și devine astfel o valoare „prezumptiv adevărată", sau care se apropie în cel mai înalt grad de precizie de valoarea reală nereproductibilă pe cale experimentală.

Scanned with OKEN Scanner

De asemenea, trebuie bine precizat şi reţinut faptul că, pentru a se evita confuzii, este strict necesar ca atunci cînd se procedează la aprecierea erorilor comise prin măsurători şi observaţii, *să se fixeze* în prealabil valoarea de referinţă la care raportăm valorile rezultate prin măsurare.

Această condiţie este obligatorie şi în cazul specificat mai sus, cînd măsura luată ca unitate este cunoscută cu exactitate ideală (fără eroare), precum şi în cazul cînd măsura luată ca unitate, teoretic materializată printr-un obiect care constituie o măsură metrologică, ar prezenta ea însăşi erori de construcţie descoperite la verificare cu o măsură de ordin superior de precizie.

În toate cazurile, pentru a preciza ideile şi a înlătura confuziile, este util să scriem de la început ecuaţia de definiţie a erorii, anume:

Eroare = valoarea actuală (măsurată) minus *valoarea de referinţă* (2)

În fiecare categorie de probleme care se pun în teoria erorilor de măsurare şi observaţie şi în practică, trebuie definit ce se înţelege prin valoare actuală, respectiv măsurată, şi care mărime se alege drept valoare de referinţă. În cele ce urmează, arătăm cum se rezolvă această problemă.

§ 7. Eroarea unei măsuri terminale (cu capete)

Măsura terminală este o măsură-model folosită în tehnică şi în special în fabrici. Lungimea unei măsuri terminale, materializată, nu este lipsită complet de eroare. Orice instrument de măsurat de acest fel este afectat de o eroare datorită inexactităţii de construcţie; acest defect se descoperă prin compararea cu o măsură-etalon de precizie superioară, de regulă considerată ca lipsită de eroare. Rezultatul comparării constituie o operaţie de măsurare directă, conform cu ecuaţia (1), şi reprezintă „valoarea actuală" a piesei supusă verificării. Valoarea înscrisă ca indicaţie pe măsura terminală reprezintă valoarea pe care trebuie să o aibă lungimea sa, numită şi *valoare nominală;* ea va fi deci considerată în problema determinării erorii drept valoare de referinţă. Prin urmare, pentru o măsură terminală, materializată, eroarea este definită prin ecuaţia (2), sub forma concretă:

Eroarea lungimii = valoarea actuală obţinută la verificare minus *valoarea nominală.* (3)

Corecţia este egală şi de semn contrar cu eroarea astfel determinată.

Exemplu numeric. Fie o măsură terminală cu inscripţia (valoarea nominală) 100 mm. Dacă prin verificarea cu măsura-etalon se constată că ea are numai 99,997 mm, avem:

Scanned with OKEN Scanner

Lungimea actuală, egală cu inscripţia care ar trebui să fie . . 99,997 mm.
Lungimea care ar trebui să fie egală cu valoarea înscrisă (nominală) . . . . . 100,000 mm.
Eroarea lungimii măsurii terminale . . . . . — 0,003 mm.

Corecţia lungimii este + 0,003 mm. Corecţia inscripţiei, pentru ca să reprezinte exact valoarea obţinută prin verificare este — 0,003 mm.
După cum se vede, corectarea măsurii terminale se poate efectua în două moduri:
— prin corectarea lungimii, pentru ca ea să corespundă inscripţiei (valorii nominale);
— prin schimbarea inscripţiei, pentru ca aceasta să corespundă lungimii constatate prin verificare.

§ 8. Eroarea unei măsuri cu scară gradată

Diviziunile trasate pe o astfel de piesă sînt prevăzute cu o inscripţie numerică, corespunzătoare numărului curent, începînd de obicei de la reperul zero.
Această indicaţie numerică înscrisă în dreptul fiecărui reper corespunde valorii nominale a diviziunii (valoarea pe care trebuie să o aibă mărimea respectivă socotită de la reperul zero). Valorile actuale ale fiecărui interval între două repere variază de-a lungul scării gradate, însă cu cantităţi foarte mici.
Ca şi în cazul precedent, eroarea se defineşte şi în acest caz prin formula (3). Corectarea unei astfel de măsuri cu scară gradată se face însă exclusiv prin corectarea valorilor inscripţiilor, deoarece o refacere a gradaţiilor ar introduce noi erori de construcţie. Inscripţia corectată reprezintă în acest caz valoarea actuală a diviziunii. În practică, corectarea inscripţiei nu se face pe piesă, ci constă în construirea unor tabele care dau erorile diviziunilor respective. Prin aceasta se obţin direct valorile măsurate corectate, deoarece corecţiile valorilor măsurate sînt egale cu erorile inscripţiei scării gradate.

§ 9. Eroarea unui aparat de măsurat cu ac indicator

Situaţia în cazul aparatelor de măsurat nu diferă de aceea prezentată în cazul măsurilor materializate, fie că indicaţia este dată prin deplasarea scării gradate prin faţa unui reper fix, fie că această indicaţie este dată prin mişcarea unui ac indicator în faţa unei scări gradate fixe, deplasările efectuîndu-se automat sau manual.
Inscripţia scării corespunde valorii nominale a măsurii (respectiv inscripţiei măsurii cu scară gradată), iar indicaţia acului indicator corespunde valorii actuale.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie să se facă o deosebire între eroarea de inscripție a scării gradate și eroarea de indicație a acului indicator. Acestor două feluri de erori le corespund ecuațiile de definiție:

Eroarea inscripției = inscripția actuală (la care se oprește acul indicator) minus *inscripția corectă* (la care ar trebui să se oprească acul indicator). (4)

Eroarea de indicație = indicația actuală (care este dată de inscripția unde s-a oprit acul) minus *indicația corectă* (care ar trebui să aibă loc pentru inscripția dată). (5)

Din aceste definiții rezultă, evident, relațiile:

— valoarea actuală a indicației = valoarea nominală a inscripției; (6)

— valoarea corectă a indicației = valoarea actuală a inscripției; (7)

— eroarea indicației = minus eroarea inscripției; (8)

Și pentru astfel de aparate sînt calculate tabele de corecție. Din considerațiile precedente rezultă că: tabela erorilor de inscripție (nominale) este totodată tabela erorilor valorilor măsurate; corecțiile valorilor măsurate sînt egale și de semne contrare cu erorile indicațiilor valorilor nominale de pe scara gradată.

Exemplu numeric. Să presupunem că un aparat de măsurat cu ac indicator ne dă valoarea măsurată $+73\ \mu$, egală cu inscripția actuală (valoarea nominală). Verificarea aparatului arată prin tabela anexată de serviciul metrologic o eroare de $+3\ \mu$ pentru această inscripție. Corecția valorii măsurate este, în acest caz, după (8), egală cu corecția inscripției cu semn schimbat: $-3\ \mu$. Valoarea măsurată corectată este deci egală cu

$$+73\ \mu - 3\ \mu = +70\ \mu.$$

§ 10. Eroarea valorii măsurate prin măsurători indirecte (comparative)

Spre deosebire de măsurătorile directe, măsurătorile indirecte, prin comparare, nu ne dau valoarea actuală a piesei de probă, ci numai *diferența* față de o *măsură-etalon*, măsură-model, aparat de măsurat-etalon sau aparat de măsurat model. Cu ajutorul unui dispozitiv presupus ideal se evaluează deci diferența δV_{pm} dintre valoarea actuală V_p a probei și valoarea actuală a măsurii cu care se face comparația V_m. Dispozitivul de măsurat constă dintr-un aparat de măsurat cu ac indicator, astfel încît diferența δV_{pm} devine de fapt diferența dintre indicația acului față de proba I_p și indicația acului față de măsura aleasă pentru comparație I_m. Rezultă ecuația:

$$\delta I_{pm} = I_p - I_m = V_p - V_m = \delta V_{pm}. \quad (9)$$

Să determinăm eroarea probei δV_p, după ecuația fundamentală (3):

$$\delta V_p = V_p - V_{po}, \quad (10)$$

în care V_{po} este valoarea nominală a probei. În mod analog, eroarea măsurii de comparaţie este

$$\delta V_m = V_m - V_{mo}, \tag{11}$$

deoarece în general valoarea nominală a măsurii V_{mo} nu este nici ea riguros egală cu valoarea sa actuală. Din compararea ecuaţiilor (9), (10) şi (11) rezultă pentru eroarea căutată:

$$\delta V_o = \delta V_{pm} + \delta V_m + (V_{mo} - V_{po}), \tag{12}$$

relaţie care exprimă regula: eroarea probei δV este egală cu suma diferenţei δV_{pm} găsită prin operaţia de comparare a probei cu măsura, cu eroarea δV_m a măsurii însăşi (pe care trebuie să o cunoaştem prin verificarea cu o măsură tip, de precizie superioară) şi cu diferenţa dintre valorile nominale ale măsurii utilizate şi ale probei supuse la comparare.

În practică, compararea se face obişnuit între piese de aceeaşi valoare nominală, deci:

$$V_{mo} = V_{po}, \tag{13}$$

ceea ce ne dă pentru ecuaţia fundamentală (12):

$$\delta V_p = \delta V_{pm} + \delta V_m. \tag{14}$$

Ecuaţia (10) ne dă atunci valoarea actuală:

$$V_p = V_{po} + \delta V_p \tag{15}$$

sau, ţinînd seamă de (13) şi (14), putem scrie:

$$V_p = V_{mo} + \delta V_{mo} + \delta V_{pm}. \tag{16}$$

Exemplu numeric.

Diferenţa măsurată	δV_{pm} =	+0,007 mm
Eroarea măsurii	δV_m =	—0,003 mm
Valoarea nominală a măsurii	V_{mo} =	100,000 mm
Valoarea nominală a probei	V_{po} =	99,992 mm

Eroarea probei după (12): $\delta V_p = 0{,}007 - 0{,}003 + 0{,}008 = +0{,}012$ mm.
Valoarea actuală a probei după (15): $V_p = 99{,}992 + 0{,}012 = 100{,}004$ mm.

§ 11. Formulare generală. Eroare reală. Corecţie

Dacă rezultatul unei măsurători ne dă un număr mai mare decît numărul care exprimă valoarea de referinţă pe care o admitem, determinarea se numeşte cu *eroare prin exces;* dacă acest număr este mai mic, avem o *eroare prin lipsă.*

Eroarea prin exces reprezintă diferenţa dintre numărul găsit prin măsurare şi numărul care exprimă valoarea de referinţă — eroarea prin exces fiind o mărime esenţial pozitivă; în aceste condiţii, eroarea prin lipsă va fi exprimată printr-un număr negativ.

Acestea fiind precizate, fie şirul $l_1, l_2, \cdots, l_n$ al rezultatelor a n măsurători de egală precizie asupra unei mărimi a cărei valoare precisă (adevărată) este X (necunoscută), pe care o luăm ca valoare de referinţă.

Numim *erori reale* diferenţele luate cu *semnele lor algebrice:*

$$\Delta_1 = l_1 - X,\ \Delta_2 = l_2 - X, \cdots,\ \Delta_n = l_n - X,$$

şir pe care-l vom scrie pentru prescurtare şi sub forma

$$\Delta_i = l_i - X \quad (i = 1,\ 2, \cdots, n). \tag{17}$$

Mărimea egală cu eroarea luată cu *semn schimbat* se numeşte *corecţie* şi se notează cu

$$C_i = -\Delta_i.$$

§ 12. Principiul mediei aritmetice

Una dintre problemele fundamentale pusă în teoria erorilor este alegerea celei mai bune valori care trebuie considerată drept valoare adevărată, deci o valoare pe care o putem lua ca cel mai bun rezultat al măsurătorii. Experienţa arată, iar teoria calculului probabilităţilor justifică, faptul că cea mai bună valoare este media aritmetică, *deoarece media aritmetică a unui şir suficient de mare de măsurători de egală precizie tinde către valoarea precisă (adevărată) cu atît mai exact, cu cît numărul măsurătorilor este mai mare.* Acest principiu al mediei aritmetice va fi justificat şi utilizat deseori în cele ce urmează. Apoi, va fi generalizat prin media aritmetică ponderată.

Sumînd egalităţile (17) se obţine

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n = l_1 + l_2 + \cdots + l_n - nX,$$

ceea ce se scrie, în teoria erorilor, după o notaţie clasică introdusă de *Gauss*, sub forma

$$[\Delta] = [l] - nX,$$

unde parantezele drepte ţin loc de semnul sumării.

Rezolvînd ecuaţia precedentă în raport cu X, se obţine

$$X = \frac{[l]}{n} - \frac{[\Delta]}{n};$$

sau cu notaţiile

$$L = \frac{[l]}{n};\quad \delta = \frac{[\Delta]}{n};\ C = -\delta. \tag{18}$$

rezultă relaţiile fundamentale:

$$X = L - \delta;\quad X = L + C. \tag{19}$$

Numim mărimea L, definită prin prima relaţie (18), *media aritmetică* a şirului de valori obţinute prin măsurare pentru mărimea X

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

necunoscută. L se mai numește *valoare medie a șirului*. Mărimea δ, definită prin a doua relație (18), este media aritmetică a erorilor reale de care sînt afectate rezultatele măsurătorilor, numită *valoare medie a erorilor*. Scriind prima relație (19) sub forma

$$\delta = L - X, \tag{20}$$

putem justifica și denumirea de *eroare a mediei aritmetice* pentru mărimea δ, întrucît conform definiției (17) ea ne dă diferența dintre media aritmetică L și valoarea adevărată necunoscută X.

A doua formulă (19) introduce corecția C, care aplicată valorii rezultate din măsurători L ne dă valoarea adevărată X.

Din condiția d, § 5, adică principiul probabilist asupra erorilor întîmplătoare, rezultă evident că:

$$\delta \to 0, \text{ cînd } n \to \infty;$$

așadar,

$$L \to X,$$

admițînd că limita L, definită prin prima relație (18), există, ceea ce este plauzibil deoarece în această expresie, cînd n crește, va crește și valoarea sumei $[l]$, raportul lor prezentîndu-se pentru $n = \infty$ ca o nedeterminare de forma $\frac{\infty}{\infty}$; admitem că acest raport are o limită finită, căci nu poate fi vorba de executarea efectivă a unui număr infinit de operații; totuși, rezultatul precedent se extinde și la acest caz.

De altfel, în calculul probabilităților se examinează și se precizează noțiunea de limită în sens probabilist.

Din analiza specificului pe care îl prezintă șirul erorilor întîmplătoare, rezultă însăși metoda cea mai indicată de studiu. O primă observație este că nu se poate vorbi de examinarea fiecărei erori în parte, ci numai de concluzii asupra proprietăților *totalității* erorilor conținute într-un șir determinat și referitor la anumite operații executate în condiții identice și bine definite.

Asupra operației de efectuare a valorii medii vom reveni cu precizări în cap. I, partea II, care se referă la calculul probabilităților.

83063

§ 13. Eroare medie. Abatere. Precizia unei măsurători

Din proprietatea fundamentală a erorilor de a se distribui complet dezordonat astfel încît pentru un număr suficient de mare de determinări să avem în medie tot atîtea valori pozitive cîte vor fi și

Scanned with OKEN Scanner

negative, proprietate exprimată prin relaţia

$$\lim_{n\to\infty}[\Delta]=0,$$

rezultă că valoarea medie a erorilor reale nu poate constitui un element convenabil pentru studiul proprietăţilor şi rezultatelor măsurătorilor afectate de erori. De aceea, s-a găsit indicat să se introducă în calcule *valorile absolute* ale erorilor, numite şi *abateri absolute*

$$|\Delta_1|=|l_1-X|,\ |\Delta_2|=|l_2-X|,\cdots,\ |\Delta_n|=|l_n-X|\ .$$

Cum este evident că

$$|\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n|\leqslant|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|\,,$$

rezultă că, dacă

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_n|}{n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|}{n}\,,$$

principiul mediei aritmetice este satisfăcut de îndată ce seria valorilor absolute $|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|$ ale erorilor reale nu creşte indefinit cu n, ceea ce este în conformitate cu realitatea, deoarece practica ne arată că erorile $|\Delta_1|,\ |\Delta_2|,\cdots,\ |\Delta_n|$ oscilează între limite restrînse, după cum vom vedea din consideraţiile care vor fi dezvoltate în cele ce urmează. De altfel, aceste erori sînt cînd mai mici, cînd mai mari, neputînd să depăşească o anumită limită finită, după proprietatea fundamentală a erorilor întîmplătoare (principiul limitativ).

Această împrejurare permite definirea *erorii medii*, prin media aritmetică a erorilor absolute:

$$\theta=\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|}{n}=\frac{[|\Delta|]}{n}\,. \qquad (21)$$

Exemple. 1. Din măsurătorile unghiurilor α, β, γ la 22 triunghiuri geodezice, valorile găsite pentru $\alpha+\beta+\gamma$ diferă de valoarea teoretică 180° + excesul sferic, după cum rezultă din tabela care urmează.

Notînd:

(180° + excesul sferic) = Δ, s-au găsit următoarele erori reale Δ:

1	+ 0,36″	9	+0,56″	17	+ 1,62″
2	+ 0,93″	10	—0,00″	18	+ 1,62″
3	— 0,51″	11	—0,59″	19	+ 1,67″
4	— 1,46″	12	—0,00″	20	— 0,72″
5	— 0,95″	13	—1,36″	21	— 1,35″
6	— 1,40″	14	+1,86″	22	— 0,98″
7	+ 1,76″	15	—0,42″		
8	+ 0,92″	16	+1,68″		

În valoare absolută . . 22,72″

$$[|\Delta|]=22{,}72''.$$

Eroarea medie va fi deci:

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{22{,}72''}{22} = \pm 1{,}03'',$$

pe cînd $\delta = \frac{[\Delta]}{n} = -0{,}09$, deci suficient de mică.

Observăm că eroarea medie ne dă o informaţie preţioasă asupra *preciziei* cu care s-au efectuat operaţiile; în cazul erorilor reale, nu putem găsi o astfel de indicaţie asupra preciziei: cu cît eroarea medie este mai *mare*, cu atît precizia este mai *mică* şi reciproc.

Luînd, deci, însăşi valoarea medie a valorii măsurate

$$L = \frac{[l]}{n}$$

drept valoarea cea mai probabilă pentru mărimea măsurată, eroarea măsurătorii astfel efectuată va fi dată de valoarea lui θ (21), iar precizia depinde de această valoare, după cum vom arăta în teoria probabilităţilor.

Ca principiu de *verificare a calculului* ne servim de condiţia ca suma algebrică a erorilor reale să fie nulă:

$$[\Delta] = 0 .$$

2. S-a măsurat un unghi şi s-au găsit valorile:

l	*erorile*	*verificare*
35°26′16″	+2″,8	$[+\Delta] = +7{,}4$
20″	−1″,2	$[-\Delta] = -7{,}4$
18″	+0″,8	$[\Delta] = 0.$
25″	−6″,2	
15″	+3″,8	
Suma 94″		
Media $\frac{94}{5} = 18''{,}8$		

$$[|\Delta|] = 14''{,}8 .$$

Valoarea medie considerată ca valoare reală $L = 35°26'18''{,}8$.

Deci $$\theta = \frac{14{,}8}{5} = 2''{,}96.$$

În ceea ce precede, am afirmat că drept valoarea cea mai apropiată de valoarea precisă (adevărată) a unei mărimi poate fi luată valoarea dată de media aritmetică a valorilor obţinute experimental, pe care am considerat-o chiar valoare adevărată (prezumtivă).

Această afirmaţie înseamnă că valoarea dată de media aritmetică este cea mai apropiată de valorile experimentale, adică ea face minime diferenţele dintre valoarea cea mai bună şi valorile experimentale; de dorit ar fi ca ea să corespundă la diferenţe egale cu zero, ceea ce evident că nu este posibil.

Chestiunea revine deci la o problemă strict matematică de minim, ceea ce se studiază în calculul probabilităţilor.

Scanned with OKEN Scanner

Neputînd deci anula *toate erorile absolute* şi nici găsi o valoare care să le facă *pe toate*, simultan, foarte mici, metoda matematică adoptată şi conformă cu verificarea practică, după cum vom vedea mai tîrziu, este:
1. aflarea unei valori care să facă minimă *suma erorilor absolute*, în care caz ne-am asigurat de satisfacerea condiţiei d, § 5, pentru erorile întîmplătoare;
2. aflarea unei valori care să facă minimă *suma pătratelor erorilor* (reale sau în valoare absolută, ceea ce în cazul ridicării la pătrat este acelaşi lucru). Vom vedea imediat prin ce consideraţii se impune această nouă noţiune.

§ 14. Metoda celor mai mici abateri (în valoare absolută). Mediană

Teoremă. Suma abaterilor absolute a n numere date, fixe:

$$x_1,\ x_2, \cdots, x_n$$

de la un număr variabil X, luat ca *valoare de referinţă*, adică suma

$$|x_1-X|+|x_2-X|+\cdots+|x_n-X|,$$

este minimă pentru cel puţin o valoare X_m a lui X. Dacă *n este impar*, X_m este egal cu numărul x_i care ocupă *rangul median* în şirul numerelor $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *aranjat în ordine crescătoare*.
Dacă *n este par*, putem adopta pentru X_m una dintre valorile conţinute în *intervalul median*, inclusiv frontierele acestui interval.
Valoarea X_m astfel adoptată se numeşte *mediană*. Ea diferă de media aritmetică simplă şi de media aritmetică ponderată.
Pentru fixarea ideilor, să demonstrăm teorema în cazul concret $n=7$ şi $n=6$; la sfîrşitul paragrafului vom da o demonstraţie generală.
$n=7$; să aranjăm valorile în ordinea crescătoare pe o dreaptă şi să dăm lui X o valoare provizorie cuprinsă, de exemplu, între x_3 şi x_4 (fig. 1).

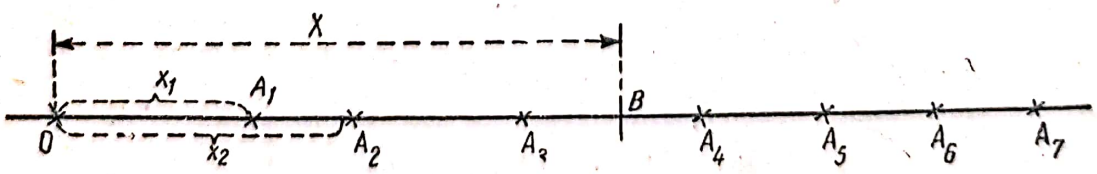


Fig. 1

$$\overline{OA_1}=x_1,\quad \overline{OA_2}=x_2,\ \cdots\ \overline{OA_7}=x_7;\quad \overline{OB}=X.$$

Suma abaterilor

$$S=|x_1-X|+|x_2-X|+|x_3-X|+|x_4-X|+|x_5-X|+ \\ +|x_6-X|+|x_7-X|$$

se poate scrie ţinînd seamă că $|x_i-X|=|X-x_i|$:

$$S=A_1B+A_2B+A_3B+BA_4+BA_5+BA_6+BA_7,$$

considerînd, cum am făcut în cazul de faţă, pe B între x_3 şi x_4. Cînd B se deplasează în intervalul A_3A_4, toţi termenii sumei S vor varia. Dar, observăm că putem scrie:

$$\left.\begin{array}{ll} A_1B=A_1A_3+A_3B; & BA_4=BA_4; \\ A_2B=A_2A_3+A_3B; & BA_5=BA_4+A_4A_5; \\ A_3B=\quad\ A_3B; & BA_6=BA_4+A_4A_6; \\ & BA_7=BA_4+A_4A_7. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

În aceste condiţii, suma S se poate scrie adunînd grupurile de termeni ($A_3B+BA_4=A_3A_4$), care apar de trei ori, şi obţinem

$$S=A_1A_3+A_2A_3+A_4A_5+A_4A_6+A_4A_7+3\,A_3A_4+BA_4.$$

Observăm că, în expresia astfel scrisă, toţi termenii sînt constanţi, cu excepţia ultimului termen BA_4, care este evident variabil cu poziţia lui B în intervalul A_3A_4. Este clar că maximul sumei este pentru $B \to A_3$ şi minimul pentru $B \to A_4$; or pentru $n=7$ (impar), termenul A_4 ocupă rangul median al şirului, lăsînd tot atîtea puncte la dreapta lui, cîte sînt la stînga lui.

Dar cînd B se găseşte între A_3 şi A_4, el va avea mai puţine puncte la stînga şi mai multe la dreapta; aşadar, pentru a obţine minimul sumei S trebuie să deplasăm punctul B spre regiunea cu mai multe puncte A.

Pentru n par, de exemplu $n=6$, observăm că în valorile (22) dispare ultimul termen variabil astfel încît suma S este constantă oricare ar fi poziţia punctului B în intervalul A_3A_4, inclusiv frontierele. Rezultă, aşadar, că în acest caz avem o mulţime de valori acceptabile pentru mărimea X care corespunde condiţiei cerute prin teorema enunţată.

Această nedeterminare în aflarea valorii celei mai convenabile a lui X face ca media celor mai mici abateri să nu fie adecvată calculului practic şi să fie înlocuită printr-o metodă care să permită găsirea *unei singure* valori X_0 pentru X, care să rezolve problema de minim propusă. Această metodă este cunoscută sub numele de *metoda celor mai mici pătrate*.

Scanned with OKEN Scanner

Datorită acestui fapt, metoda abaterilor *nu* scoate în evidenţă gradul de precizie al operaţiilor de măsurare şi observaţie. De exemplu, putem avea două şiruri cu aceeaşi eroare medie:

$$\frac{3+2+4+2+1+0+4+3+2+3}{10}=2{,}4$$

şi

$$\frac{0+1+7+2+1+1+8+0+3+1}{10}=2{,}4,$$

ceea ce ar conduce la afirmaţia că ambele măsurători au fost efectuate cu acelaşi grad de precizie, ceea ce este evident fals. Este evident că în şirul al doilea apar două măsurători excentrice care au aspectul de erori grosolane, ceea ce dă un caracter mai puţin precis şirului al doilea de măsurători.
Vom constata că metoda celor mai mici pătrate pune în evidenţă această deosebire de precizie, în mod automat şi riguros.

Să concretizăm metoda abaterilor printr-un exemplu numeric.
S-a efectuat un şir de 40 măsurători ale unei lungimi date, obţinîndu-se valorile (în metri) grupate pe intervale, spre a putea uşor afla intervalul median:

I	II	III	V	V	VI	VII	VIII
2,48	2,75	3,11	3,68	4,15	4,76	5,08	6,35
2,28	2,95	3,27	3,78	4,49	4,65	5,48	
	2,81	3,43	3,76	4,08	4,51	5,23	
	2,64	3,26	3,95	4,43	4,84	5,21	
	2,98	3,28	3,78	4,21	4,59		
	2,66	3,22	3,98	4,45			
			3,91	4,43			
				4,10			
				4,18			
2 obs.	6 obs.	6 obs.	7 obs.	9 obs.	5 obs.	4 obs.	1 obs.
		21 observaţii			19 observaţii		

Avînd în total 40 de observaţii, rezultă că intervalul median se va găsi între valorile măsurate care ocupă rangul 20 şi 21. Pentru a găsi acest interval, este suficient să aranjăm în ordine crescătoare numerele care figurează în coloana a IV-a. Se obţine astfel:

Rangul		
	15	3,68
	16	3,76
	17	3,78
	18	3,78
	19	3,91
	20	3,95
	21	3,98

Prin urmare, intervalul median este cuprins între 3,95 şi 3,98.

Scanned with OKEN Scanner

După metoda celor mai mici abateri, vom putea adopta deci drept valoare apropiată (mediană) *oricare* dintre numerele cuprinse între 3,95 și 3,98, inclusiv aceste două.
Vom arăta mai tîrziu că metoda celor mai mici pătrate ne dă o singură valoare admisibilă, anume media aritmetică, diferită de mediană.

O *demonstrație generală a teoremei celor mai mici abateri*, enunțată la începutul paragrafului precedent.
Problema de minim se formulează astfel: să se determine valoarea variabilei X pentru care:

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i-X|=|x_1-X|+|x_2-X|+\cdots+|x_n-X|=\text{minim}, \qquad (23)$$

unde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sînt valori fixe date, pe care le presupunem ordonate în succesiune crescătoare. Este clar că valoarea X_m căutată se va găsi undeva, într-un interval determinat de două valori consecutive ale șirului $x_1, x_2, \cdots, x_n$; fie, pentru a fixa ideile, (x_r, x_{r+1}) acest interval. Condiția de minim cere ca derivata în raport cu X a sumei abaterilor să fie nulă:

$$\frac{d}{dX}\sum_{i=1}^{n}|x_i-X|=0. \qquad (24)$$

Trebuie observat că această derivată nu este definită în toate punctele intervalului, în special pentru punctele $X=x_i$. În adevăr, suma valorilor absolute (23) nu poate fi considerată ca o funcție analitică. Punînd în evidență intervalul care conține pe X și scriind diferențele în valori absolute, avem

$$\frac{d}{dX}[(X-x_1)+(X-x_2)+\cdots+(X-x_r)+(x_{r+1}-X)+$$
$$+(x_{r+2}-X)+\cdots+(x_n-X)]=0;$$

de unde rezultă condiția:

$$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{r\text{ termeni}} - \underbrace{(1+1+\cdots+1)}_{(n-r)\text{ termeni}}=0$$

satisfăcută evident pentru

$$r=n-r \text{ adică } r=\frac{n}{2}.$$

Așadar, intervalul $(r, r+1)$ trebuie să fie intervalul median $\left(\frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}\right)$ al șirului, rezultat găsit pentru cazul particular tratat.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru $n=2k-1$ (impar) avem $X_m=x_k$, deoarece în acest caz $|X_m-x_k|=0$.

Pentru $n=2k$ şi, dacă întîmplător $x_k=x_{k+1}$, atunci X_m este egal cu valoarea lor comună. În caz contrar, deci pentru $x_k \neq x_{k+1}$ valoarea lui X rămîne nedeterminată dacă nu se iau în seamă alte consideraţii suplimentare pentru precizarea unei valori unice, deoarece valoarea căutată se găseşte oriunde în intervalul median, inclusiv extremităţile acestui interval:

$$x_k \leqslant X_m \leqslant x_{k+1} . \tag{25}$$

Se poate verifica uşor că o astfel de valoare mediană, unic determinată pentru n impar sau numai conţinută în intervalul median pentru n par, şi care este indicată prin condiţia de extrem (24), face ca suma (23) să capete o valoare efectiv minimă; adică, pentru orice valoare $X' \neq X_m$, unde $X_m=x_k$ pentru n impar sau satisface inegalităţile (25) pentru n par, suma abaterilor faţă de X' este mai mare decît suma abaterilor faţă de X_m, ceea ce este adevărat în toate cazurile. În acest scop, este suficient să luăm o valoare X' vecină valorii mediane (pentru n impar) sau vecină intervalului median (pentru n par).

Prin urmare:

Cazul n impar se descompune în două posibilităţi:

a) Presupunem că $x_{k-1}<X'<x'_k$. Putem scrie, pentru suma (23) unde punem X' în loc de X_m:

$$\sum_{i=1}^{k-1}(X'-x_i)+(x_k-X')+\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-X')=\sum_{i=1}^{k-1}(X_m-x_i)+$$

$$+(k-2)(X'-X_m)+(x_k-X')+\sum_{k+1}^{n}(x_i-X_m)+(k-1)(X_m-X')=$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}(X_m-x_i)+(x_k-X_m)+\sum_{k+1}^{n}(x_i-X_m)+(x_k-X')=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|x_i-X_m|+(x_k-X')>\sum_{i=1}^{n}|x_i-X_m| ,$$

căci, în cazul considerat $x_k=X_m$; $x_k-X'>0$ şi $n=k$.

b) Presupunem că $x_k<X'<x_{k+1}$. Putem scrie, analog:

$$\sum_{i=1}^{k-1}(X'-x_i)+(X'-x_k)+\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-X')=\sum_{i=1}^{n}(X_m-x_i)+$$

$$+(k-2)(X'-X_m)+(X'-x_k)+\sum_{i=k+1}^{n}(x_i-X_m)+(k-1)(X_m-X')=$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1}(X_m - x_i) + (X_m - x_k) + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - X_m) + (X' - x_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m| + (X' - x_k) > \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m|,$$

căci, prin ipoteză avem $X' > x_k$ pentru $X' > X_m = x_k$.

Cazul n par se descompune, de asemenea, în două posibilităţi:

a) Presupunem că $x_{k-1} < X' < x_k \leqslant X_m \leqslant x_{k+1}$. Putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{k-1}(X' - x_i) + (x_k - X') + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - X') = \sum_{i=1}^{k-1}(X_m - x_i) +$$

$$+ (k-2)(X' - X_m) + (x_k - X') + \sum_{i=k+1}^{n}(x_i - X_m) + (k-1)(X_m - X') =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m| - (X_m - x_k) - (X' - X_m) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m| +$$

$$+ (x_k - X') > \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m|,$$

căci, prin ipoteză, în acest caz avem $x_k > X'$ şi $n = 2k$.

b) Presupunem că $x_k \leqslant X_m \leqslant x_{k+1} < X'$. Avem analog:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(X' - x_i) + \sum_{i=k+2}^{n}(x_i - X') = \sum_{i=1}^{k}(X_m - x_i) + (k-1)(X' - X_m) +$$

$$+ (X' - X_{k+1}) + \sum_{i=k+2}^{n}(x_i - X_m) + (k-2)(X_m - X') =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m| + (X' - x_{k+1}) - (x_{k+1} - X_m) + (X' - X_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m| + 2(X' - x_{k+1}) > \sum_{i=1}^{n}|x_i - X_m|,$$

căci, prin ipoteză, în acest caz, $X' > x_{k+1} \geqslant X_m$ şi $n = 2k$.

Am demonstrat că în toate cazurile valoarea mediană face minimă suma abaterilor (23).

Dar se menţine încă, în consideraţiile noastre, ambiguitatea în ceea ce priveşte determinarea exactă şi unică a valorii mediane X_m în cazul cînd n este par, şi anume, fixarea poziţiei lui X_m în intervalul median (x_k, x_{k+1}). Pentru fixarea acestei poziţii, se pot propune mai multe criterii în alegerea valorii mediane. De exemplu, s-a propus ca această valoare mediană să fie luată egală chiar cu valoarea medie a valorilor extreme: $\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, ceea ce însă s-a

Scanned with OKEN Scanner

dovedit că nu este satisfăcător, criteriul neavînd o fundamentare teoretică justificată şi nici rezultate numerice convenabile.
S-a propus şi se utilizează adeseori drept valoare a medianei media aritmetică a valorilor extreme ale intervalului median:

$$X_m = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) \,. \tag{26}$$

Este evident că această valoare poate fi mai corectă, dar nu este pe deplin justificată. În alte cazuri, se ia ca valoare mediană valoarea cea mai probabilă a mărimii măsurate, anume, în cazul cînd se admite o distribuţie normală a valorilor, adică după legea lui Gauss, despre care vom vorbi mai tîrziu.

§ 15. Formule pentru mediană

Un criteriu care poate conduce la o formulă utilă se bazează pe ideea de a considera *numărul de rezultate* distribuit în intervale de întinderi *egale* şi convenabil alese. Se admite că valorile date de măsurători sînt distribuite *uniform* în intervalele respective. Pentru a le distinge de intervalele inegale, definite de însăşi valorile obţinute prin măsurători (x_i, x_{i+1}), vom nota intervalele egale prin (ξ_j, ξ_{j+1}), de întindere ξ, aceeaşi pentru toţi $j=1, 2, \cdots, n$, valorile dintr-un astfel de interval formînd o grupă. Fie $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$ intervalul de grupe care conţine intervalul median (x_k, x_{k+1}), în care se află valoarea medianei X_m. Pentru fixarea poziţiei X_m în intervalul median, se poate alege criteriul: întinderea intervalului $(X_m - \xi_\mu)$ se raportează la întinderea întregului interval $\xi_{\mu+1} - \xi_\mu = \xi$, aşa cum se raportează numărul de valori conţinute în intervalul $(X_m - \xi_\mu)$ la numărul de valori conţinute în intervalul $(\xi_\mu, \xi_{\mu+1})$; fie n_μ acest ultim număr.
În ceea ce priveşte numărul de valori conţinute în intervalul (ξ_μ, X_m), se poate admite că este egal cu numărul de valori conţinute în intervalul (ξ_μ, x_k), deoarece între x_k şi X_m nu mai există nici o altă valoare. Acest număr, însă, se obţine scăzînd din numărul total cuprins în toate intervalele pînă la valoarea x_k, numărul pe care-l însemnăm prin ipoteză, cu $n_k = \frac{n}{2}$, suma tuturor numerelor de valori conţinute în intervalele pînă la ξ_μ, pe care le notăm prin $n_{1,\,\mu} = \sum_{i=1}^{\mu} n_i$.

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, criteriul enunțat mai sus ne conduce la relația

$$\frac{X_m-\xi_\mu}{\xi}=\frac{\frac{n}{2}-\sum_{i=1}^{\mu} n_i}{n_\mu},$$

sau

$$X_m=\xi_\mu+\xi\frac{\frac{n}{2}-n_{1,\mu}}{n_\mu}, \qquad (27)$$

în care:

X_m este valoarea medianei;

ξ_μ — valoarea originii intervalului de grupe care conține intervalul median;

n — numărul total de măsurători sau observații;

ξ — întinderea intervalului de grupe;

$n_{1,\mu}=\sum_{1}^{\mu} n_i$ — suma numerelor de valori conținute în toate intervalele anterioare intervalului de grupe care conține intervalul median;

n_μ — numărul de valori conținute de intervalul de grupe care conține intervalul median.

Formula (27), deși este mult utilizată în practică, totuși prezintă o inconsecvență teoretică: admițînd că între X_m și x_k nu există nici o valoare, am exclus posibilitatea ca x_{k+1} să se afle chiar în X_m ceea ce este inclus în condiția (25). Pentru a evita această restricție arbitrară, este indicat să luăm ca valoare de referință pentru numărul de valori, media numerelor valorilor extreme ale intervalului median, adică a valorilor cuprinse în intervalele (x_1, x_k) și (x_1, x_{k+1}):

$$\frac{1}{2}(n_k+n_{k+1})=\frac{n+1}{2},$$

astfel încît formula (27) devine

$$X_m=\xi_\mu+\xi\frac{\frac{n+1}{2}-n_{1,\mu}}{n_\mu}, \qquad (28)$$

cu aceleași notații.

Pentru compararea rezultatelor ce pot fi obținute cu formulele (26), (27) și (28) vom considera cîteva cazuri de aplicații numerice.

1. Să considerăm exemplul din § 14, pentru 40 de observații. Alegem intervalele de grupe astfel încît $\xi=0{,}5$. Formăm tabela:

i	Intervalele de grupe $\xi_{i+1}-\xi_i$	Numărul observaţiilor n_i	Sumele $n_{1,i}=\sum_{j=1}^{i} n_j$
1	2,0 . . . 2,5	2	2
2	2,5 . . . 3,0	6	8
3	3,0 . . . 3,5	6	14
4	3,5 . . . 4,0	7	21
5	4,0 . . . 4,5	9	30
6	4,5 . . . 5,0	5	35
7	5,0 . . . 5,5	4	39
8	5,5 . . . 6,0	0	39
9	6,0 . . . 6,5	1	40

$$\xi_\mu=3{,}5;\quad \xi=0{,}5;\quad n=\sum_{1}^{9} n_i=40;\quad n_\mu=7;\quad n_{1,\mu}=14;\quad k=\frac{40}{2}=20$$

Formula (26) ne dă o valoare

$$X'_m=\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})=\frac{1}{2}(3{,}95+3{,}98)=3{,}965,$$

căci $x_k=3{,}95$ şi $x_{k+1}=3{,}98$ după datele obţinute anterior.

Formula (27) ne dă, cu datele din tabela de mai sus:

$$X''_m=3{,}5+0{,}5\,\frac{\frac{40}{2}-14}{7}=3{,}5+\frac{3}{7}=3{,}5+0{,}43=3{,}93;$$

aşadar o valoare care iese din intervalul median (3,95 . . . 3,98).

Formula (28) ne dă, cu aceleaşi date:

$$X_m=3{,}5+0{,}5\,\frac{\frac{41}{2}-14}{7}=3{,}5+\frac{3{,}25}{7}=3{,}5+0{,}464=3{,}965,$$

în foarte bună concordanţă cu valoarea X'_m şi cuprinsă în intervalul median.

2. Un alt exemplu îl avem în datele numerice ale comparării etaloanelor fundamentale din U.R.S.S. ale metrului şi kilogramului, cu prototipurile Biroului Internaţional de măsuri şi greutăţi.

Tabela următoare ne redă aceste date, unde am luat cîte 12 măsurători, pentru a aplica formulele noastre la cazul de ambiguitate: *n par*. Aranjăm în tabelă datele în ordine crescătoare, spre a descoperi intervalul median:

Scanned with OKEN Scanner

	Etalonul metrului (nr. 28)	Etalonul kilogramului (nr. 12)
1	1 m+0,29	1 kg+0,0557
2	+0,29	+0,0579
3	+0,35	+0,0608
4	+0,42	+0,0633
5	+0,44	+0,0669
6	+0,45	+0,0674
7	+0,49	+0,0692
8	+0,56	+0,0698
9	+0,61	+0,0719
10	+0,64	+0,0755
11	+0,65	+0,0764
12	+0,68	+0,0769
	$n=12$; $k=\frac{12}{2}=6$	$n=12$; $k=6$
	Intervalul median: $x_k=0,45$ $x_{k+1}=0,49$	Intervalul median: $x_k=0,0674$ $x_{k+1}=0,0692$

Scriem şi tabela de intervale grupale, pentru fiecare etalon separat:

Etalonul metrului			Etalonul kilogramului		
$(\xi_i,\ \xi_{i+1})$	n_i	$n_{1,i}$	$(\xi_i,\ \xi_{i+1})$	n_i	$n_{1,i}$
0,25 . . . 0,30	2	2	0,055 . . . 0,058	2	2
0,30 . . . 0,35	1	3	0,058 . . . 0,061	1	3
0,35 . . . 0,40	0	3	0,061 . . . 0,064	1	4
0,40 . . . 0,45	3	6	0,064 . . . 0,067	1	5
0,45 . . . 0,50	1	7	0,067 . . . 0,070	3	8
0,50 . . . 0,55	0	7	0,070 . . . 0,073	1	9
0,55 . . . 0,60	1	8	0,073 . . . 0,076	1	10
0,60 . . . 0,65	3	11	0,076 . . . 0,079	2	12
0,65 . . . 0,70	1	12			
$\xi_\mu=0,45$; $\xi=0,05$; $n_{1,\mu}=6$; $n_k=1$			$\xi_\mu=0,067$; $\xi=0,003$; $n_{1,\mu}=5$; $n_k=3$		
$X_1'=0,47$; $X''=0,45$; $X_m=0,461$			$X'=0,0683$; $X''=0,068$; $X_m=0,0685$		

Scanned with OKEN Scanner

§ 16. Modul (M_0) sau dominanta

Aceasta este valoarea tipică a unei distribuții luată, în multe cazuri din practică, ca valoare de referință. Ea este definită prin valoarea căreia îi corespunde densitatea (frecvența) maximă pe graficul distribuției considerate; se poate spune că este vîrful liniei poligonale a frecvențelor. Dacă linia frecvențelor nu prezintă decît un singur vîrf (un maxim), valoarea modului se citește direct, în caz contrar ea se calculează prin una din următoarele formule.
Pentru distribuții ușor asimetrice, se folosește formula

$$M_0 = L - 3(L - M_e), \tag{29}$$

unde L este media aritmetică a valorilor obținute (18), iar M_e mediana distribuției, dedusă după cum s-a arătat în paragraful precedent.
Formula (29) poate fi scrisă prin următoarea considerație de plauzibilitate: pentru o distribuție ușor asimetrică, valoarea mediei aritmetice L se găsește pe regiunea cozii lungi a curbei, iar mediana se află la $\frac{2}{3}$ între L și modul M_0.

O altă formulă bazată pe considerații teoretice se obține calcînd o porțiune de curbă continuă — de exemplu, un interval de parabolă — pe graficul distribuției, în vecinătatea intervalului în care se află modul. Toate intervalele se consideră de aceeași lungime h. Fie N începutul intervalului în care se află modul, x este abaterea de la începutul N, măsurată în unități de lungime a intervalului; fie (0,1) intervalul modului și (−1,0; respectiv 1,2) intervalele adiacente în jos și în sus; fie α_2 indicele de frecvență pe intervalul modului și α_1, α_3 indicii corespunzători celorlalte intervale (prin indice de frecvență se notează frecvența relativă: $\alpha_i = \frac{f_i}{\Sigma f_i}$).

Să considerăm parabola $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x$. Coeficienții a_0, a_1, a_2 se determină prin condițiile de racordare

$$\int_{-1}^{0} \varphi(x)\,dx = \alpha_1, \quad \int_{0}^{1} \varphi(x)\,dx = \alpha_2, \quad \int_{1}^{2} \varphi(x)\,dx = \alpha_3.$$

Din calculul acestor expresii se deduc relațiile

$$\alpha_1 = a_0 - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}, \quad \alpha_2 = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}, \quad \alpha_3 = a_0 + \frac{3}{2}a_1 + \frac{7}{3}a_2.$$

Printr-un calcul simplu se obține:

$$a_1 = \alpha_2 - \alpha_1, \quad 2a_2 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea abaterii maxime x_m, corespunzătoare poziției modului, se rezolvă ecuația derivată $\varphi'(x)=a_1+2a_2x=0$.
Se găsește

$$x_m=-\frac{a_1}{2a_2}=\frac{a_2-a_1}{2a_2-a_1-a_3}\,.$$

Introducînd această valoare în expresia $M_0=N+hx_m$, rezultă formula căutată:

$$M_0=N+\frac{a_2-a_1}{2a_2-a_1-a_3}\,h\,. \tag{30}$$

Exemplu numeric. Dintr-un lot de piese prefabricate se obține distribuția:

Intervalele	Frecvența f_i	Frecvența relativă
27,5 . . . 29,5	3	0,018
29,5 . . . 31,5	9	0,053
31,5 . . . 33,5	23	0,135
33,5 . . . 35,5	33	0,194
35,5 . . . 37,5	38	0,223
37,5 . . . 39,5	34	0,200
39,5 . . . 41,5	21	0,124
41,5 . . . 43,5	8	0,047
43,5 . . . 45,5	1	0,006
	170	1,000

Cu aceste valori rezultă:

$$N=35{,}5\,;\quad h=2\,;\quad a_1=0{,}194\,;\quad a_2=0{,}223\,;\quad a_3=0{,}200$$

astfel încît:

$$M_0=35{,}5+\frac{0{,}223-0{,}194}{2\cdot 0{,}223-0{,}194-0{,}200}\cdot 2=35{,}5+1{,}11=36{,}61\,.$$

§ 17. Metoda celor mai mici pătrate

Dacă, în loc de a pune problema determinării unei valori a lui X care să facă minimă suma abaterilor absolute, vom căuta o valoare a lui X care să facă minimă suma pătratelor erorilor față de o anumită valoare X luată ca valoare de referință, obținem:
Teoremă. Fiind date n numere determinate (prin măsurători)

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$$

Scanned with OKEN Scanner

și o mărime variabilă X, suma pătratelor erorilor, adică

$$(x_1-X)^2+(x_2-X)^2+\cdots+(x_n-X)^2 \qquad (31)$$

este minimă pentru o singură valoare a lui X, anume, media aritmetică a numerelor date:

$$X_0=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}.$$

Vom demonstra în teoria probabilităţilor că minimul sumei pătratelor erorilor ne conduce la valoarea cea mai bună — cea mai probabilă — a unui şir de rezultate obţinute prin operaţiiile de măsurare.

Deocamdată, expunem două demonstraţii elementare ale teoremei enunţate.

În adevăr, suma pătratelor se poate scrie sub forma

$$n\left(X^2-2X\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)+(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2),$$

sau

$$n\left(X-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2-\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2+(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2).$$

În această ultimă expresie, singurul termen care conţine variabila X este primul termen pătratic; este clar că acest termen face suma de mai sus minimă dacă este el însuşi minim; dar aceasta are loc, evident, pentru o valoare a mărimii X care anulează paranteza în care figurează X şi care este exact egală cu media arittică X_0, aşa cum am enunţat.

Acelaşi rezultat se găseşte derivînd suma (31), considerată ca funcţie de variabila X. În adevăr, derivata funcţiei (31) în raport cu X, egalată cu zero, ne dă relaţia

$$2(x_1-X)+2(x_2-X)+\cdots+2(x_n-X)=0,$$

de unde rezultă valoarea X_0.

Un prim avantaj care reiese din aplicarea metodei celor mai mici pătrate este, precum se vede, aflarea *unei singure valori* care satisface condiţia de minim — nu mai multe ca în cazul metodei abaterilor minime. *Problema are, deci, o determinare unică.* Aşa, de exemplu, în şirul celor 40 măsurători date la § 14, media aritmetică este 3,93, care se încadrează în intervalul imediat anterior celui dedus prin teoria celor mai mici abateri.

Un alt avantaj al metodei celor mai mici pătrate constă în faptul că prin această metodă se ridică ambiguitatea privitoare la şirul

Scanned with OKEN Scanner

de măsurători „cu cea mai bună precizie". După cum se vede din exemplul dat la § 14, şirurile considerate ne dau aceeaşi *eroare medie* (2,4); dacă însă calculăm „eroarea medie pătratică" pe care o definim mai departe (§ 18), obţinem:

pentru şirul întîi

$$\pm\sqrt{\frac{72}{10}} = \pm 2{,}7,$$

pentru şirul al doilea

$$\pm\sqrt{\frac{130}{10}} = \pm 3{,}6,$$

de unde rezultă clar că primul şir constituie un grup de măsurători efectuate cu mai multă îngrijire, deci mai precis decît al doilea grup. Un alt avantaj al introducerii erorii medii pătratice este că, pentru un n suficient de mare, această eroare îşi păstrează sensibil aceeaşi valoare, căci cu cît se măreşte numitorul n, cu atît se măreşte şi numărătorul $\sum\Delta^2$, după cum vom vedea din expresia acestei erori, raportul păstrînd, de la un moment dat, o valoare staţionară. Acest avantaj prezintă şi un interes practic, deoarece adeseori este suficient un număr relativ restrîns de operaţii experimentale pentru a ajunge la o valoare convenabil de stabilă.

§ 18. Eroarea medie pătratică

După cum am mai spus, vom vedea cum calculul probabilităţilor ne va conduce la necesitatea logică de a introduce metoda celor mai mici pătrate; aşa cum din metoda celor mai mici abateri am ajuns să definim eroarea medie, tot astfel din metoda celor mai mici pătrate sîntem conduşi să introducem *eroarea medie pătratică*, cu ajutorul erorilor reale, prin formula de definiţie:

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots+\Delta_n^2}{n}},$$

sau, în notaţiile lui Gauss:

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \text{ unde } [\Delta^2] = \sum_{i=1}^{n}\Delta_i^2 . \qquad (32)$$

În calculul probabilităţilor vom arăta ce relaţii există între eroarea medie şi eroarea medie pătratică.

Scanned with OKEN Scanner

Un caz care ne semnalează o nepotrivire în defavoarea erorii medii pătratice rezultă din exemplul de la pag. 19 pentru măsurătorile unui unghi. Presupunem că am găsit valoarea medie. $L=35°26'18'',8$ cu erorile $+2'',8$; $-1,2$; $+0,8$; $-6,2$; $+3,8$, de unde am dedus eroarea medie $\theta=2''96$. Calculînd eroarea medie pătratică după formula (32), obținem:

$$m=\pm\sqrt{\frac{7,84+1,44+0,64+38,44+14,44}{5}}=\pm\sqrt{\frac{62,80}{5}}=\pm 3'',54;$$

așadar, mai mare în valoarea absolută decît θ.

Se pune întrebarea: este mai indicată eroarea medie sau eroarea medie pătratică pentru determinarea *preciziei* cu care se efectuează operațiile de măsurătoare? Teoria probabilităților se pronunță în favoarea celei de-a doua.

Pentru un moment, observăm că rezultatul găsit în exemplul precedent este general: *eroarea medie pătratică este mai mare decît eroarea medie.* Calculul probabilităților determină exact raportul dintre aceste două erori, după cum vom arăta mai tîrziu. Vom constata că pentru $n\to\infty$ avem:

$$\theta=0,7979\,m\approx\frac{4}{5}\,m\,. \tag{33}$$

În exemplul precedent

$$\frac{4}{5}m=\frac{4}{5}\cdot 3,54=2,83\,,$$

în loc de 2,96 care este eroarea medie calculată direct. Această nepotrivire nu trebuie să ne surprindă, căci provine din faptul că relația (33) este adevărată pentru un număr foarte mare ($n\to\infty$) de termeni.

Să demonstrăm, pentru cazul *a doi* termeni, că eroarea medie pătratică este mai mare decît eroarea medie. În adevăr, avem:

eroare medie: $\theta=\dfrac{|\Delta_1|+|\Delta_2|}{2}$; eroare medie pătratică: $m=\sqrt{\dfrac{\Delta_1^2+\Delta_2^2}{2}}$;

rezultă

$$\theta^2=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+2|\Delta_1|\cdot|\Delta_2|}{4};\quad m^2=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2}{2}=\frac{2\Delta_1^2+2\Delta_2^2}{4};$$

așadar,

$$m^2-\theta^2=\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2-2|\Delta_1|\cdot|\Delta_2|}{4}=\frac{(\Delta_1-\Delta_2)^2}{4}\geqslant 0\,.$$

Prin urmare $m^2>\theta^2$ și $m=\theta$ pentru $\Delta_1=\Delta_2$ (caz cu totul particular). Această demonstrație se extinde și la un număr oarecare de termeni.

Demonstrația generală o vom da în teoria probabilităților.

Scanned with OKEN Scanner

§ 19. Eroare limită. Prag de siguranță. Eroare probabilă. Eroare relativă

Am arătat că una dintre condițiile care trebuie satisfăcute de șirul erorilor întîmplătoare este să nu existe un șir de erori individuale care depășesc o anumită limită, despre care am spus că este determinabilă prin calcul (principiul limitativ).

În teoria erorilor, vom demonstra că o eroare individuală poate fi mai mare decît eroarea medie pătratică în 32 cazuri din 100, mai mare decît dublul erorii medii pătratice în cinci cazuri din 100 și mai mare decît triplul erorii medii pătratice în trei cazuri din 1 000. Prin urmare, este de așteptat ca o eroare întîmplătoare individuală să nu depășească triplul erorii medii pătratice. Probabilitatea ca această valoare să nu fie depășită este 0,9973, valoare numită *prag de siguranță*.

De aceea, putem admite, cu suficientă îndreptățire, că triplul erorii medii pătratice constituie o eroare limită superioară.

Deci

$$\Delta_{lim} = 3\,m\,. \qquad (34)$$

În anumite cazuri, de mai bună precizie (măsurători geodezice de primul ordin sau alte repartiții), se poate lua ca eroare limită chiar *dublul* erorii medii pătratice și chiar mai puțin, în general de forma

$$\Delta_{lim} = K \cdot m$$

în care K este un coeficient care depinde de pragul de siguranță și de repartiția considerată.

Prin aceasta, sensul principiului limitativ este mai bine precizat.

Eroare probabilă ρ se numește acea valoare a unei erori întîmplătoare pentru care valorile mai mari și mai mici decît ea se întîlnesc tot atît de des. Dacă se ordonează un șir de rezultate în succesiunea crescătoare a valorilor erorilor reale, eroarea probabilă se va găsi în mijlocul acestui șir.

Pentru un număr suficient de mare de măsurători se poate determina valoarea aproximativă a erorii probabile. O valoare riguroasă a erorii probabile se determină tot prin calculul probabilităților, unde se stabilește relația

$$\rho = \frac{2}{3}\,m \qquad (35)$$

între eroarea probabilă ρ și eroarea medie pătratică, formulă pe care o vom stabili mai tîrziu.

Scanned with OKEN Scanner

Eroarea relativă. Erorile definite pînă acum — reală, medie, medie pătratică, limită și probabilă — se mai numesc și *erori absolute*, prin opoziție cu *erorile relative*, care sînt niște erori absolute raportate la valoarea însăși, sau calculate procentual.
Pentru erorile absolute, în sensul de mai sus, se utilizează termenul scurt de *eroare*. Cum aceste erori provin din măsurarea unor mărimi concrete, ele se exprimă în *aceleași unități de măsură ca și mărimile respective*.
Prin definiție, numim *eroare relativă* raportul dintre eroarea absolută și valoarea mărimii măsurate:

$$\Delta_{rel} = \frac{\Delta}{L},$$

însemnînd cu L valoarea mărimii considerate. Rezultatul este un număr. Prin urmare, putem spune că eroarea relativă se exprimă în fracțiuni din valoarea mărimii măsurate sau în procente, scriind:

$$\Delta_{rel} = 100 \frac{\Delta}{L} \%.$$

Erorile relative caracterizează complet rezultatul măsurătorii în ceea ce privește gradul de precizie. În adevăr, dacă știm că eroarea medie pătratică în măsurarea unei lungimi, de exemplu, este de 1 mm, nu putem trage concluzia imediată că operația de măsurătoare a fost executată în bune condiții sau nu. Această apreciere depinde de valoarea lungimii măsurate. În adevăr, dacă lungimea este o bază de 1 km, se poate afirma că măsurătoarea s-a făcut cu mare precizie, eroarea relativă fiind 10^{-7} din lungimea măsurată; dacă însă s-a măsurat grosimea reperelor de pe o scară termometrică, măsurătoarea este nesatisfăcătoare, eroarea fiind de însuși ordinul de mărime al mărimii măsurate.

§ 20. Propagarea erorilor independente

De cele mai multe ori, în practică, o mărime care trebuie măsurată nu poate fi accesibilă la o măsurătoare directă, ci trebuie dedusă din măsurători efectuate asupra unor alte mărimi, deducerea rezultînd din formula care leagă mărimile direct accesibile de mărimea inaccesibilă direct. De exemplu, nu putem măsura direct suma unghiurilor unui triunghi, ci numai fiecare unghi în parte, urmînd a aduna rezultatele obținute direct; operația adunării definește mărimea căutată (suma) prin mărimile cunoscute (fiecare unghi în parte).

Scanned with OKEN Scanner

Dar atunci se pune problema: dat fiind că rezultatele măsurătorilor directe sînt afectate de erori inevitabile, cum se manifestă acest fapt în rezultatul care ne dă din formulă valoarea mărimii inaccesibile la măsurătoare directă?

Să concretizăm problema prin specificarea că vom trata numai cazul erorilor medii pătratice cu care sînt afectate operaţiile individuale.

Multiplicarea. Fie x rezultatul unei măsurători şi k un număr determinat, cunoscut precis, fără eroare.

Funcţia

$$z=kx, \tag{36}$$

care leagă parametrul constant k de argumentul variabil x, determină legea de propagare a erorii de care este afectată mărimea x, la mărimea derivată z. Argumentul variabil x este considerat ca o variabilă continuă, În aceste condiţii, ecuaţia (36) ne permite să exprimăm eroarea Δz a funcţiei z prin eroarea Δx a variabilei x:

$$\Delta z=k\cdot\Delta x, \tag{37}$$

ceea ce se poate obţine aplicînd operaţia de variaţie finită în expresia (36).

Să admitem acum că am efectuat n determinări ale mărimii x, obţinînd valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, afectate respectiv de erorile Δx_1, $\Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$. Din relaţia (37) deducem

$$\begin{aligned}\Delta z_1&=k\cdot\Delta x_1,\\ \Delta z_2&=k\cdot\Delta x_2,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \Delta z_n&=k\cdot\Delta x_n.\end{aligned}$$

Formînd media aritmetică a pătratelor erorilor Δz_i avem:

$$\frac{[\Delta z^2]}{n}=k^2\frac{[\Delta x^2]}{n}, \tag{38}$$

sau, introducînd notaţiile

$$m_z^2=\frac{[\Delta z^2]}{n};\quad m_x^2=\frac{[\Delta x^2]}{n}, \tag{39}$$

rezultă din (38)

$$m_z=km_x. \tag{40}$$

Pentru concretizarea acestor tipuri de erori, să presupunem că am efectuat măsurarea unei lungimi — o distanţă în linie dreaptă — cu o riglă a cărei etalonare nu s-a făcut perfect, ci această eta-

Scanned with OKEN Scanner

lonare prezintă o imprecizie egală cu eroarea medie pătratică m; admiţînd că operaţia însăşi de măsurare se efectuează fără eroare (adică se poate face abstracţie de erori care, în realitate, nu pot fi evitate) atunci, repetînd aşezarea acestei rigle defectuoase de k ori, vom face o eroare totală dată de relaţia (40).

Adunarea. Să considerăm două mărimi x şi y, care pot fi măsurate sau observate *independent*; adică operaţia asupra uneia dintre ele să nu influenţeze operaţia care trebuie efectuată asupra celeilalte. Fie Δx şi Δy erorile cu care sînt afectate rezultatele măsurătorilor celor două mărimi x respectiv y. Se pune întrebarea: care va fi eroarea funcţiei de cele două argumente, definită prin relaţia

$$z=x\pm y\,. \tag{41}$$

Prin operaţia de diferenţiere, deducem imediat relaţia

$$\Delta z=\Delta x\pm\Delta y\,, \tag{42}$$

care ne dă eroarea Δz a sumei mărimilor date.

Problema care se pune este aceeaşi ca şi în cazul precedent: avînd erorile medii pătratice ale unui şir de determinări pentru cele două mărimi în parte, să se determine eroarea medie pătratică a funcţiei z definită prin relaţia (41). Pentru rezolvarea acestei probleme scriem şirul de egalităţi individuale deduse din (42):

$$\begin{aligned}
\Delta z_1&=\Delta x_1\pm\Delta y_1\,,\\
\Delta z_2&=\Delta x_2\pm\Delta y_2\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\Delta z_n&=\Delta x_n\pm\Delta y_n\,,
\end{aligned} \tag{43}$$

admiţînd că s-au efectuat acelaşi număr n de operaţii asupra fiecăreia dintre cele două mărimi.

Ridicînd la pătrat şi adunînd egalităţile (43), obţinem:

$$\frac{[\Delta z^2]}{n}=\frac{[\Delta x^2]}{n}+\frac{[\Delta y^2]}{n}\pm 2\frac{1}{n}[\Delta x\cdot\Delta y]\,, \tag{44}$$

unde $[\Delta x\cdot\Delta y]$ reprezintă suma produselor erorilor reale, presupuse independente una de alta. Or, din proprietăţile de bază ale erorilor întîmplătoare ştim că astfel de erori, în virtutea principiului distributiv, satisfac condiţia că suma erorilor negative compensează suma erorilor pozitive, pentru un număr suficient de mare de operaţii. Aşadar, vom avea

$$\lim_{n\to\infty}[\Delta x]=0\,,\quad \lim_{n\to\infty}[\Delta y]=0\,,\quad \text{deci}\quad \lim_{n\to\infty}[\Delta x\cdot\Delta y]=0\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, relația (44) devine

$$\frac{[\Delta z^2]}{n}=\frac{[\Delta x^2]}{n}+\frac{[\Delta y^2]}{n}, \tag{45}$$

sau, cu notațiile adoptate:

$$m_z^2=m_x^2+m_y^2, \tag{46}$$

unde m_z, m_x, m_y sînt erorile medii pătratice ale funcției z și argumentelor x și y.

Formula (46) ne spune că eroarea medie pătratică a sumei sau diferenței a două mărimi este aceeași, egală cu suma pătratelor erorilor medii pătratice ale celor două mărimi.

Această teoremă este foarte importantă pentru legea propagării erorilor medii pătratice; ea are un aspect similar teoremei de geometrie a lui Pitagora: eroarea rezultantă se propagă pe ipotenuza triunghiului dreptunghi format de erorile argumentelor drept catete.

Faptul că eroarea rezultantă este aceeași, atît pentru sumă cît și pentru diferența argumentelor, este important din punct de vedere practic; el ne arată că determinări care dau rezultate prea apropiate nu asigură o mai mare siguranță a operației.

Exemplu. Dacă am determinat lungimea $x=310$ mm cu eroarea medie pătratică $m_x=\pm 3$ mm și lungimea $y=290$ mm, cu eroarea medie pătratică $m_y=\pm 4$ mm, rezultă că diferența $z=310-290=20$ mm este determinată cu o eroare medie pătratică dată de relația $m_z^2=m_x^2+m_y^2=9+16=25$; $m_z=\pm 5$ mm; or, această valoare corespunde unei erori relative de $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$, adică un sfert din însăși lungimea obținută, ceea ce indică o mare imprecizie a operației. Dimpotrivă, pentru suma: $z=310+290=600$ mm, eroarea de ± 5 mm corespunde unei erori relative de $\frac{5}{600}=\frac{1}{120}$, deci o determinare convenabil de precisă.

În cazul particular în care

$$m_x=m_y=m,$$

din formula (46) rezultă

$$m_z=\pm m\sqrt{2}. \tag{47}$$

Fie un număr oarecare N de argumente:

$$Z=X_1\pm X_2\pm\cdots\pm X_N, \tag{48}$$

unde mărimile X_1, X_2, ..., X_N sînt independente între ele.

Scanned with OKEN Scanner

Este clar că, prin același procedeu și același raționament ca și în cazul a două argumente, obținem rezultatul generalizat:

$$m_z^2 = m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_N^2 , \tag{49}$$

pentru erorile medii pătratice corespunzătoare.
În cazul particular, în care toate argumentele au aceeași eroare medie pătratică,

$$m_1 = m_2 = m_3 = \cdots = m_N = m ,$$

din relația (48) rezultă generalizarea formulei (47); pentru eroarea medie pătratică a funcției z avem:

$$m_z = \pm m\sqrt{N} . \tag{50}$$

Concretizarea acestei legi de propagare a erorii medii pătratice se poate face luînd ca exemplu măsurătoarea unei linii drepte cu o riglă perfect etalonată, dar admițînd că, de fiecare dată cînd se așază rigla, se efectuează aceeași eroare medie pătratică $\pm m$ și că nu este de așteptat o predominare a erorilor negative sau pozitive. În aceste condiții, după N operații vom obține un rezultat afectat de o eroare totală dată de relația (50).

§ 21. Funcție liniară

Din contopirea celor două teoreme relative la multiplicare și la adunarea algebrică, deducem expresia generală a teoremei pentru determinarea mediei pătratice a unei funcții liniare de argumentele $X_1, X_2, \ldots, X_N$:

$$Z = K_1 X_1 \pm K_2 X_2 \pm \cdots \pm K_N X_N , \tag{51}$$

unde $K_1, K_2, \ldots, K_N$ sînt constante. Formula (51) se reduce la (48) punînd

$$Y_1 = K_1 X_1 , \quad Y_2 = K_2 X_2 , \cdots , \quad Y_N = K_N X_N ,$$

astfel încît

$$Z = Y_1 \pm Y_2 \pm \cdots \pm Y_N .$$

Din formula (49) rezultă:

$$m_Z^2 = m_{Y_1}^2 + m_{Y_2}^2 + \cdots + m_{Y_N}^2 ,$$

unde, după (40), avem

$$m_{Y_1} = K_1 m_1 ; \quad m_{Y_2} = K_2 m_2 ; \quad \cdots ; \quad m_{Y_N} = K_N m_N .$$

Scanned with OKEN Scanner

În definitiv, pentru eroarea medie pătratică a funcției Z rezultă:

$$m_Z^2 = K_1^2 m_1^2 + K_2^2 m_2^2 + \cdots + K_N^2 m_N^2 . \qquad (52)$$

Exemplu. Fie

$$Z = \frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{5} x_3 ;$$

formula (52) ne dă pentru eroarea medie pătratică a lui Z:

$$m_Z^2 = \frac{1}{4} m_1^2 + \frac{1}{9} m_2^2 + \frac{1}{25} m_3^2 ,$$

dacă m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3} sînt erorile medii pătratice ale mărimilor x_1, x_2, x_3.

§ 22. Funcție generală

Teoremele precedente soluționează problema propagării erorilor, căci metoda folosită permite tratarea unei funcții mai complicate decît funcția liniară.

Observăm că o funcție oarecare de argumentele X_1, X_2, ..., X_N anume

$$Z = f(X_1, X_2, \cdots, X_N) , \qquad (53)$$

unde mărimile X_1, X_2, ..., X_N sînt independente, nu poate fi tratată în toată generalitatea. Totuși, făcînd ipoteza evident justificată că erorile sînt mărimi relativ *mici* (prin comparație cu valorile înseși ale mărimilor) putem dezvolta funcția (53) în serie Taylor. Dacă ΔX_1, ΔX_2, ..., ΔX_N sînt erorile de care sînt afectate determinările argumentelor X_1, X_2, ..., X_N, avem

$$Z + \Delta Z = f(X_1 + \Delta X_1, X_2 + \Delta X_2, \cdots, X_N + \Delta X_N) ,$$

sau

$$Z + \Delta Z = f(X_1, X_2, \cdots, X_N) + \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 + \cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial f}{\partial X_N} \Delta X_N + 0(\Delta X^2) ,$$

astfel încît

$$\Delta Z = \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_N} \Delta X_N + 0(\Delta X^2) , \qquad (54)$$

unde $0(\Delta X^2)$ înseamnă termeni de ordinul de mărime cel puțin egal cu ΔX_i^2, termeni pe care-i neglijăm, în virtutea faptului că aceste erori sînt foarte mici. Așadar, în *primă aproximație*, putem

considera funcţia Z ca o funcţie liniară, astfel încît expresia (54) să poată fi considerată ca fiind de forma

$$\Delta Z = K_1 \cdot \Delta X_1 + K_2 \cdot \Delta X_2 + \cdots + K_N \cdot \Delta X_N,$$

unde am pus

$$K_1 = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad K_2 = \frac{\partial f}{\partial X_2}, \ldots, K_N = \frac{\partial f}{\partial X_N}.$$

Rezultă aşadar formula generală

$$m_Z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X_1} m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2} m_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial X_N} m_N\right)^2. \qquad (55)$$

În această formulă, derivatele parţiale ale funcţiei $f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ se calculează luînd pentru variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_N$ valorile aproximative admise şi deduse din calculele aplicate valorilor măsurate. Pe de altă parte, erorile $m_1, m_2, \ldots, m_N$ rezultă din surse *independente* una de alta, cum ar fi, de exemplu, în cazul măsurătorii unghiurilor orizontale, o eroare de citire m_0, o eroare de vizare m_v şi o eroare de centrare m_c; influenţa totală a acestor erori va fi, după formula (49):

$$m = \pm\sqrt{m_0^2 + m_v^2 + m_c^2}.$$

Trebuie observat şi reţinut faptul că, în demonstraţiile precedente, am identificat erorile reale cu variaţiile finite (respectiv diferenţialele) ale valorii însăşi a mărimii considerată ca argument, x, ceea ce implică condiţia de continuitate a funcţiilor considerate de aceste argumente, ipoteză plauzibilă prin faptul că formulele noastre sînt valabile pentru un număr suficient de mare de măsurători.

Exemple de aplicaţie a formulei (55). 1. Se dă o bază $\overline{AB} = c$, măsurată fără eroare, sau mai corect, cu o eroare neglijabilă (măsură etalon) faţă de erorile de care sînt afectate rezultatele măsurării unghiurilor α şi β, care fixează poziţia punctului P faţă de baza $\overline{AB}$ (fig. 2). Se pune întrebarea: care este eroarea medie pătratică a valorii cu care este determinată astfel distanţa $\overline{BP} = a$, dacă se cunosc erorile medii pătratice m_α şi m_β cu care sînt măsurate direct unghiurile α şi β?

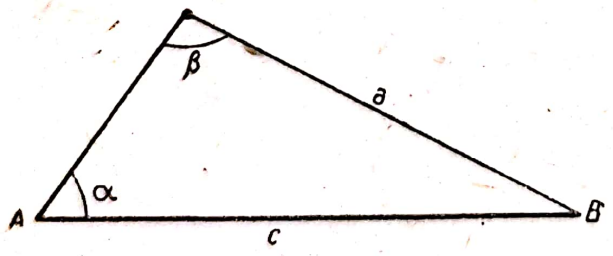


Fig. 2

Din triunghiurl ABP, după teorema sinusului, avem:

$$a = c\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

Aplicînd regula de diferențiere acestei formule, unde α și β sînt variabile, deducem

$$\Delta a=\frac{c}{\sin\beta}\cos\alpha\cdot\Delta\alpha-c\sin\alpha\frac{\cos\beta}{\sin^2\beta}\Delta\beta=a\operatorname{ctg}\alpha\cdot\Delta\alpha-a\operatorname{ctg}\beta\cdot\Delta\beta;$$

de unde, aplicînd formula (55):

$$m_a=\pm a\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot m_\alpha^2+\operatorname{ctg}^2\beta\cdot m_\beta^2},$$

sau, admițînd că ambele unghiuri au fost măsurate cu aceeași precizie

$$m_\alpha=m_\beta=m,$$

rezultă:

$$m_a=\pm a\cdot m\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

De exemplu, luînd numeric:

$$\alpha=\beta=60^\circ;\quad m=10'',$$

eroarea relativă este

$$\frac{m_a}{a}=\pm0{,}000\,0396\approx\pm0{,}004\%\ \text{din}\ a.$$

Dacă s-ar măsura și al treilea unghi din B, atunci calculul s-ar complica, deoarece am avea de-a face cu măsurători condiționate, despre care vom vorbi mai tîrziu.

2. Într-un triunghi s-a măsurat baza b de 112,00 m cu o eroare medie pătratică $\pm$ 0,05 m și înălțimea h de 60,18 m cu o eroare medie pătratică $\pm$ 0,03 m. Să se determine suprafața triunghiului și eroarea medie pătratică a rezultatului obținut.

Avem

$$S=\frac{1}{2}bh=3\,370{,}08\ \text{m}^2.$$

După formula (55) avem:

$$m_S^2=\left(\frac{\partial S}{\partial b}\right)^2m_b^2+\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)^2m_h^2.$$

Așadar,

$$m_S^2=\left(\frac{h}{2}m_b\right)^2+\left(\frac{b}{2}m_h\right)^2=\left(30{,}09\,\frac{5}{100}\right)^2+\left(56{,}0\,\frac{3}{100}\right)^2=(1{,}50)^2+(1{,}68)^2=$$
$$=2{,}25+2{,}82=5{,}07$$

și, în definitiv,

$$m_S=\pm2{,}25;\ \text{deci}\ S=3\,370{,}08\pm2{,}25\ \text{m}^2.$$

În unele cazuri, calculul se poate simplifica logaritmînd expresia care leagă mărimile măsurate. Astfel, în exemplul precedent avem

$$\lg S=\lg b+\lg h-\lg 2,$$

care se prezintă sub forma mai simplă (48).

Scanned with OKEN Scanner

Formula (49) ne dă:

$$m^2_{\lg S} = m^2_{\lg b} + m^2_{\lg h} .$$

Variaţiile fiind mici, se poate lua drept formulă de legătură între m şi $m_{\lg}$ expresia:

$$m_{\lg} = d_i \, m ,$$

unde d_i reprezintă diferenţa tabulară logaritmică.
Calculul se poate aranja schematic în felul următor:

lg	Diferenţa tabulară d_i	$m_{\lg}$	m	$m^2_{\lg}$
lg b . . . . 2,04922 lg h . . . . 1,77945 colg 2 1,69897	39 pentru 0,10 7 pentru 0,01	19,5 21,0	0,05 0,03	380 441
lg S 3,52764	13 pentru 1,00 S=3 370,08;			821

Deci

$$m^2_{\lg S} = 821; \; m_{\lg S} = 28{,}6 .$$

Rezultă

$$m_S = \frac{1}{13} \times 28{,}6 = 2{,}23 .$$

Putem raţiona şi precum urmează: pentru logaritmul 3,52764, diferenţa tabulară este 13 pentru 1,0. Atunci, variaţiei x a argumentului îi corespunde diferenţa tabulară 28,6, aşadar $x = \frac{28{,}6}{13}$; x=2,23; rezultă S=3 370,08 ± 2,23 m², în concordanţă cu rezultatul anterior.

§ 23. Eroarea medie pătratică a mediei aritmetice

Dacă se efectuează măsurători repetate în condiţii identice şi *independente* între ele cu rezultatele $l_1, l_2, \ldots, l_n$, atunci se consideră că cea mai bună valoare de adoptat pentru mărimea considerată este media aritmetică, după cum am observat şi în § 1:

$$L = \frac{l_1 + l_2 + \cdots + l_n}{n} ,$$

care se mai poate scrie

$$L = \frac{1}{n} l_1 + \frac{1}{n} l_2 + \cdots + \frac{1}{n} l_n , \qquad (56)$$

unde $\frac{1}{n}$ este un număr fix dat. În condițiile specificate, putem considera că fiecare măsurătoare este afectată de aceeași eroare medie pătratică m. Dacă notăm cu M eroarea medie pătratică a mediei aritmetice și observăm că expresia (56) are forma (41), rezultă că

$$M^2=\frac{1}{n^2}m^2+\frac{1}{n^2}m^2+\ldots+\frac{1}{n^2}m^2=\frac{n}{n^2}m^2=\frac{1}{n}m^2 .$$

Prin urmare,

$$M=\pm\frac{m}{\sqrt{n}}, \qquad (57)$$

adică eroarea medie pătratică a mediei aritmetice este de $\sqrt{n}$ ori mai mică decît eroarea medie pătratică a determinărilor individuale ale mărimii supusă măsurătorii.

Eroarea medie pătratică m a unei măsurători individuale stabilită anterior servește drept criteriu de apreciere a *preciziei șirului* de măsurători individuale în parte. Eroarea medie pătratică M a mediei aritmetice servește drept criteriu de apreciere a *preciziei rezultatului* acestor măsurători.

Ea arată în ce măsură slăbește influența erorilor întîmplătoare cînd se fac măsurători suficient de numeroase. Formula (56) ne arată că, mărind numărul de observații n, se poate reduce eroarea medie pătratică M sub orice limită. În practică se constată, însă, că mărimea M descrește foarte încet cînd n este crescător.

De exemplu, pentru $m=1$ și

$n=1$	2	3	4	5	6	8	10	20	50	100

obținem

$M=1$; 0,71; 0,58; 0,5; 0,45; 0,41; 0,35; 0,32; 0,22; 0,14; 0,1 .

Din acest fapt tragem concluzia că nu obținem prea mari avantaje cînd mărim numărul de observații peste o anumită limită.

Mărimea M caracterizează gradul de influență pe care îl au asupra rezultatului final *numai* erorile întîmplătoare, erori care pot fi sezisate numai cu instrumente sensibile. Cînd avem de-a face însă cu instrumente de măsurat mai puțin precise, se întîmplă că, adeseori, în erorile întîmplătoare se includ și erorile provenite din sensibilitatea mai mică a aparatului, erori cu caracter mai mult sistematic și care nu pot fi reduse prin creșterea numărului de operații. Practic, aceasta înseamnă că, de exemplu, teodolitul de 1′ să nu poată da precizia pe care ne-o dă teodolitul de 10″. De aceea, problema erorilor întîmplătoare privește lucrul cu instrumentele de mare precizie.

Scanned with OKEN Scanner

§ 24. Eroarea medie pătratică a erorii medii pătratice individuale

Este evident că eroarea medie pătratică obținută prin calcul, așa cum se face efectiv, dintr-un număr *limitat* de determinări, nu reprezintă o valoare exactă. O astfel de valoare exactă ar trebui obținută — ca și valoarea adevărată prezumtivă a mărimii însăși — dintr-un număr *infinit* de determinări, ceea ce practic este imposibil.

Ne propunem să evaluăm eroarea medie pătratică a valorii obținute pentru eroarea medie pătratică individuală.

Fie m_0 valoarea teoretică pe care am obține-o după un număr infinit de măsurători, deci valoarea exactă prezumtivă. Să calculăm media pătratică a pătratului erorii medii pătratice, pe care o notăm cu (m^2). Eroarea reală a lui m^2 este

$$\Delta(m^2) = m^2 - m_0^2$$

sau

$$\Delta(m^2) = \frac{[\Delta^2]}{n} - m_0^2 = \frac{1}{n}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2 - nm_0^2) .$$

Prin ridicare la pătrat rezultă:

$$\{\Delta(m^2)\}^2 = \frac{1}{n^2}\{\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \cdots + \Delta_n^4 + 2\Delta_1^2\Delta_2^2 + \cdots + 2\Delta_{n-1}^2\Delta_n^2 - 2nm_0^2(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2) + n^2 m_0^4\} .$$

Pe baza repartiției gaussiene, se obține:

$$\frac{[\Delta^4]}{n} = 3m_0^4 .$$

Luăm apoi ca valoare medie pentru fiecare Δ_i^2 pe m_0^2 însuși și notăm valoarea medie a lui $\{\Delta(m^2)\}^2$ prin $\{M(m^2)\}^2$. Avem, așadar:

$$M(m^2) = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot m_0^2 .$$

Dar cum valoarea m_0 nu este cunoscută, o înlocuim prin valoarea ei aproximativă experimentală m^2, astfel încît

$$M(m^2) = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot m^2 , \qquad (58)$$

ceea ce ne dă eroarea medie pătratică a pătratului erorii medii pătratice individuale, determinată din pătratele celor n erori reale $\Delta_i^2 (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Scanned with OKEN Scanner

Pe de altă parte, aplicăm teoria propagării erorilor pentru o funcție oarecare, la funcția

$$f = m^2 .$$

Eroarea medie pătratică a funcției este

$$M(m^2) = \frac{\partial f}{\partial m} M(m) ;$$

deci

$$M(m^2) = 2m \cdot M(m) .$$

Rezultă:

$$M(m) = \frac{M(m^2)}{2m} ,$$

iar după formula (58) obținem formula căutată

$$M(m) = \frac{m}{\sqrt{2n}} . \tag{59}$$

Așadar, eroarea medie pătratică individuală m este determinată numai cu o nesiguranță de $\pm M(m)$.
Se definește „coeficientul de siguranță" pentru media aritmetică L prin expresia

$$S = \frac{M(m)}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{m}{n} ,$$

sau

$$S = \frac{[v^2]}{n\sqrt{2(n-1)}} . \tag{60}$$

§ 25. Eroarea cea mai probabilă (eroare aparentă sau reziduală)

În definiția cunoscută a erorii reale

$$\Delta_i = l_i - X \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) ,$$

unde am însemnat prin l_i valoarea determinată experimental și prin X valoarea adevărată a mărimii considerate, luată ca valoare de referință, am presupus că valoarea adevărată X ar fi riguros cunoscută, ceea ce nu este cazul decît în foarte rare împrejurări, de exemplu cînd mărimea considerată ar putea fi calculată pe o cale oarecare, sau cunoscută anticipat. Astfel, dacă efectuăm o împărțire a două numere date (care se împart exact) cu ajutorul riglei de calcul, rezultatul se obține cu o eroare egală cu diferența

Scanned with OKEN Scanner

dintre cîtul exact al împărțirii și valoarea aproximativă dată de riglă; sau, dacă măsurăm suma unghiurilor unui triunghi, a cărei valoare știm că trebuie să fie 180° etc.

În majoritatea cazurilor, însă, valoarea exactă X a mărimii considerate nu este cunoscută. Rezultă că nici erorile reale Δ_i nu pot fi cunoscute.

În aceste condiții, în locul valorii precise X (necunoscută) a mărimii considerate, se ia una dintre valorile admise ca fiind cea mai bună, cum este *mediana* sau *media aritmetică* a rezultatelor experimentale. Am arătat că media aritmetică este o valoare mai convenabilă și vom completa această afirmație prin metodele calculului probabilităților.

Vom arăta că media aritmetică este valoarea cea mai probabilă și că are toate șansele să fie cea mai apropiată de valoarea exactă. De aceea, *erorile raportate la media aritmetică*, luată ca mărime de referință, mai poartă și numele de *erorile cele mai probabile*; ele sînt cele mai apropiate de erorile întîmplătoare ale măsurătorilor. În STAS 2372-51 sînt numite *erori aparente*; se întîlnește și denumirea de *erori reziduale*. Ele se definesc prin

$$v_i = l_i - L \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \tag{61}$$

unde L este media aritmetică a celor n valori $l_1, l_2, \ldots, l_n$, date de măsurătoare:

$$L = \frac{[l]}{n}.$$

Adunînd egalitățile (61) și avînd în vedere relația de definiție (56), deducem

$$[v] = [l] - nL = 0,$$

adică suma erorilor aparente ale unui șir de măsurători este egală cu zero pentru orice număr de operații.

Dispersie liniară. Dispersie pătratică. Valoarea medie a valorilor absolute ale erorilor aparente

$$\sigma_l = \frac{[|v|]}{n} \tag{62}$$

poartă numele de *dispersie liniară* a erorilor.

Valoarea medie a pătratelor valorilor erorilor aparente

$$\sigma = \frac{[v^2]}{n}, \tag{63}$$

poartă numele de *dispersie pătratică* a erorilor.

Scanned with OKEN Scanner

Ele ne arată împrăştierea erorilor de măsurare sau de observaţie în jurul valorii medii a mărimii considerate.

Formulele lui Bessel ne dau expresia erorii medii pătratice a unei măsurători individuale, în funcţie de erorile aparente.

Fie $l_1, l_2, \ldots, l_n$ un şir de rezultate obţinute prin măsurarea unei mărimi a cărei valoare adevărată (necunoscută) este X şi a cărei valoare medie aritmetică este L.

Erorile reale sînt:

$$\Delta_i = l_i - X \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{64}$$

Erorile aparente sînt, după formula (59),

$$v_i = l_i - L \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{65}$$

Scăzînd aceste două expresii obţinem, în conformitate cu relaţia fundamentală (19),

$$\Delta_i - v_i = L - X = \delta,$$

mărime pe care am introdus-o în § 12, numită *eroarea mediei aritmetice*.

Aşadar, putem scrie

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= v_1 + \delta, \\ \Delta_2 &= v_2 + \delta, \\ &\cdots\cdots \\ \Delta_n &= v_n + \delta, \end{aligned}$$

sau, ridicînd la pătrat şi adunînd

$$[\Delta^2] = [v^2] + 2\delta \cdot [v] + n\delta^2.$$

Dar, după cele spuse la începutul acestui paragraf, $[v] = 0$, iar după § 12 şi § 18, mărimea δ nu este altceva decît eroarea medie pătratică a mediei aritmetice M, dată de formula (57).

În adevăr, după § 11, relaţia de definiţie este

$$\delta^2 = \frac{[\Delta]^2}{n^2} = \frac{[\Delta^2]}{n^2} + 2\frac{[\Delta_i \Delta_j]}{n^2}.$$

Dar cum produsele $\Delta_i \cdot \Delta_j$, conform condiţiei d din § 5 a erorilor întîmplătoare, tind către zero, rezultă că $[\Delta_i \Delta_j] \to 0$. Prin urmare,

$$\delta^2 = \frac{[\Delta^2]}{n} \cdot \frac{1}{n}.$$

În aceste condiţii, relaţia (65) se scrie, după împărţirea cu n:

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[v^2]}{n} + \frac{[\Delta^2]}{n^2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, după § 18, prin definiție [formula (40)],

$$\frac{[\Delta^2]}{n}=m^2; \tag{66}$$

așadar, putem scrie

$$m^2=\frac{[v^2]}{n}+\frac{m^2}{n},$$

sau încă

$$m^2=\frac{[v^2]}{n-1}.$$

Prin urmare, eroarea medie pătratică se poate exprima ca funcție de suma pătratelor erorilor aparente:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{67}$$

Pe de altă parte, ținînd seamă de expresia (57) pentru eroarea medie pătratică a mediei aritmetice, rezultă din (67):

$$M=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n(n-1)}}. \tag{68}$$

Formulele (67) și (68) se numesc *formulele lui Bessel.*

Aceste formule se utilizează curent în practică pentru calculul erorilor medii pătratice. Valorile m și M depind de precizia instrumentelor utilizate și sînt invariabile în limite suficient de strînse, dacă operațiile de măsurare sînt făcute în condiții cît mai fixe și mai riguros identice.

Pe de altă parte, expresiile (67) și (68) răspund corect la cazurile: $n=1$ și $n=0$. În adevăr, pentru o singură operație avem evident $[v^2]=0$, iar formulele lui Bessel se prezintă sub forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, ceea ce corespunde realității: nu se poate determina eroarea medie pătratică pentru o singură măsurătoare.

Pentru $n=0$, expresiile lui m și M devin imaginare; în adevăr, nu are sens să vorbim despre erori medii pătratice atunci cînd nu s-a efectuat nici o măsurătoare.

Exemple numerice. 1. Reluăm observațiile asupra unui unghi, după exemplul dat anterior:

$$L=35°26'18{,}8''.$$

	l	v	v^2
1	35°26'16"	—2,8	7,84
2	35 26 20	+1,2	1,44
3	35 26 18	—0,8	0,64
4	35 26 25	+6,2	38,44
5	35 26 15	—3,8	14,44

$$[v^2]=62,80.$$

Eroarea medie pătratică a unei operații individuale va fi [formula (67)]:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{62,80}{4}}=\pm 3,96'',$$

iar eroarea medie pătratică a mediei aritmetice [formula (68)]:

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\frac{3,96}{\sqrt{5}}=\pm 1,77''.$$

Așadar, putem scrie pentru valoarea măsurată

$$X=35°26'18,8''\pm 1,8''.$$

2. Bessel, efectuînd 18 măsurători independente ale unghiului dintre două stații față de o a treia stație, a găsit rezultatele:

Numărul observației	l	v	v^2
1	83°30'36,25"	+ 1,38"	1,90
2	7,50	+ 2,63	6,92
3	6,00	+ 1,13	1,28
4	4,77	— 0,10	0,01
5	3,75	— 1,12	1,25
6	0,25	— 4,62	21,34
7	3,70	— 1,17	1,37
8	6,14	+ 1,27	1,61
9	4,04	— 0,83	0,69
10	6,96	+ 2,09	4,37
11	3,16	— 1,71	2,92
12	4,57	— 0,30	0,09
13	4,75	— 0,12	0,01
14	6,50	+ 1,63	2,66
15	5,00	+ 0,13	0,02
16	4,75	— 0,12	0,01
17	4,25	— 0,62	0,38
18	5,25	+ 0,38	0,14
Suma	87,59"	+10,71" —10,64	$[v^2]=46,97$

Media aritmetică

$$L=83°30'34{,}87'' \qquad [v]=0{,}07''.$$

Eroarea medie pătratică a măsurătorii individuale

$$m=\sqrt{\frac{46{,}97}{17}}=\pm 1{,}66''.$$

Eroarea medie pătratică a mediei aritmetice

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\frac{1{,}66}{\sqrt{18}}=\pm 0{,}39''.$$

Rezultatul:

$$X=83°30'34{,}87''\pm 0{,}39''.$$

Formula lui Peters ne dă expresia erorii medii (§ 13)

$$\theta=\frac{[\Delta]}{n} \tag{69}$$

cu ajutorul erorilor aparente v_i.

După formula lui Bessel (67) și relația de definiție (66) deducem

$$[\Delta^2]=\frac{n}{n-1}[v^2], \tag{70}$$

ceea ce se mai poate scrie, aproximativ

$$|\Delta|=|v|\sqrt{\frac{n}{n-1}}. \tag{71}$$

În adevăr, avem:

$$[|\Delta|]^2=[\Delta^2]+2[|\Delta_i|\cdot|\Delta_j|],$$

deci

$$[|\Delta|]^2\approx n[\Delta^2] \tag{72}$$

și analog

$$[|v|]^2\approx n[v^2], \tag{73}$$

deoarece avem aproximativ

$$\begin{aligned}[|\Delta|]^2=&(|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|)(|\Delta_1|+|\Delta_2|+\cdots+|\Delta_n|)=\\ &=\Delta_1^2+|\Delta_1||\Delta_2|+|\Delta_1||\Delta_3|+\cdots+|\Delta_1||\Delta_n|\approx n\Delta_1^2+\\ &+|\Delta_2||\Delta_1|+\Delta_2^2+|\Delta_2||\Delta_3|+\cdots+|\Delta_2||\Delta_n|\approx n\Delta_2^2+\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+\\ &+|\Delta_n||\Delta_1|+|\Delta_n||\Delta_2|+|\Delta_n||\Delta_3|+\cdots\Delta_n^2\approx n\Delta_n^2.\end{aligned}$$

De unde, prin sumare, rezultă relația (72). Introducînd valorile (72) și (73) în (70) și extrăgînd rădăcina pătrată, obținem relația (71).

Scanned with OKEN Scanner

Dacă introducem valoarea (71) în expresia (69), obținem *formula lui Peters*

$$\theta = \frac{[|v|]}{\sqrt{n\,(n-1)}}. \tag{74}$$

Pentru un n suficient de mare putem pune:

$$n\,(n-1) \approx n^2 - n + \frac{1}{4} = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2,$$

ceea ce face ca expresia (74) să ia forma

$$\theta = \frac{[|v|]}{n - \frac{1}{2}}. \tag{75}$$

Vom demonstra în calculul probabilităților că

$$m = 1{,}253\,\theta. \tag{76}$$

Atunci, din (75), deducem

$$m = 1{,}253\,\frac{[|v|]}{n - \frac{1}{2}}, \tag{77}$$

relație care poate folosi drept control la calculul erorii medii pătratice prin formula lui Bessel. Ea are avantajul de a putea fi calculată mai ușor decît formula lui Bessel, fiind totodată și suficient de precisă, mai ales pentru n suficient de mare.

§ 26. Propagarea erorilor sistematice

Dacă rezultatul unei măsurători este obținut cu ajutorul unei mărimi măsurabile, de care depinde însă funcțional mărimea pe care urmărim s-o evaluăm, eroarea valorii obținute direct se transmite la valoarea pe care o obținem indirect prin calcul.

Să lămurim aceasta considerînd cazul des întîlnit în practică: măsurarea unui unghi α dintr-o figură geometrică, prin care se măsoară direct una dintre funcțiile trigonometrice: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. Deoarece eroarea constituie, din punct de vedere analitic, o variație finită dar foarte mică a variabilei, căreia îi corespunde o variație finită și foarte mică a funcției, pe care o presupunem continuă în domeniul de măsurare — ceea ce este realizat în practică — determinarea erorii transmise se bazează pe formarea diferențialei sau a diferenței finite, dar foarte mică, a funcției. Astfel, pentru cazurile enunțate vom avea următoarele exemple.

Exemple. 1. Măsurăm $\sin\alpha$ cu eroarea $\delta \sin\alpha$; ne întrebăm care va fi eroarea valorii lui α.

Avem, evident:

$$\delta \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \delta \alpha ,$$

de unde rezultă eroarea absolută calculată pentru unghi în funcție de eroarea valorii măsurate:

$$\delta \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \delta \sin \alpha . \tag{78}$$

De aici, introducînd eroarea relativă a valorii măsurate, ceea ce se face obișnuit în practică, obținem

$$\delta \alpha = \operatorname{tg} \alpha \frac{\delta \sin \alpha}{\sin \alpha} . \tag{79}$$

2. În mod analog avem pentru $\cos \alpha$

$$\delta \alpha = -\frac{1}{\sin \alpha} \cdot \delta \cos \alpha \tag{80}$$

și prin urmare:

$$\delta \alpha = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{\delta \cos \alpha}{\cos \alpha} . \tag{81}$$

3. Pentru $\operatorname{tg} \alpha$ avem:

$$\delta \alpha = \cos^2 \alpha \cdot \delta \operatorname{tg} \alpha , \tag{82}$$

respectiv

$$\delta \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \frac{\delta \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} . \tag{83}$$

4. Pentru $\operatorname{ctg} \alpha$ avem:

$$\delta \alpha = -\sin^2 \alpha \cdot \delta \operatorname{ctg} \alpha , \tag{84}$$

respectiv

$$\delta \alpha = -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cdot \frac{\delta \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} . \tag{85}$$

§ 27. Exemple numerice luate din practică

1. Să considerăm o măsură terminală construită din bucăți cu valori nominale diferite, afectate de erorile respective. Se cere lungimea totală (funcția este suma valorilor parțiale) și eroarea ei. Avem

$$\begin{aligned} l_1 &= 50 \text{ mm}, & \delta l_1 &= -2\,\mu ; \\ l_2 &= 7{,}5 \text{ mm}, & \delta l_2 &= -1\,\mu ; \\ l_3 &= 1{,}020 \text{ mm}, & \delta l_3 &= +1\,\mu ; \\ l_4 &= 1{,}005 \text{ mm}, & \delta l_4 &= -1\,\mu ; \end{aligned}$$

$L = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = 59{,}525$ mm, valoare nominală;
$\delta L = -3\,\mu$; $L = 59{,}522$ mm, valoare exactă.

2. Cu ajutorul unui raportor de rază R se măsoară unghiul de înclinare α dintre două piese așezate vertical, de înălțimi H și h (astfel încît $H > h$). Se cere să se determine eroarea valorii măsurate a unghiului α, cunoscînd erorile cu care sînt determinate înălțimile celor două piese, δH, δh și raza raportorului, δR. Este evident că avem, geometric:

$$\sin \alpha = \frac{H - h}{R} ,$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce prin diferențiere logaritmică ne duce la relația:

$$\frac{\delta \sin \alpha}{\sin \alpha}=\frac{\delta (H-h)}{H-h}-\frac{\delta R}{R}$$

și, prin urmare, după formula (79):

$$\delta\alpha=\operatorname{tg}\alpha\left(\frac{\delta H-\delta h}{H-h}-\frac{\delta R}{R}\right).$$

Numeric (în valori nominale):

$$H_0=50 \text{ mm}, \quad \delta H=+0{,}002 \text{ mm};$$
$$h_0=20 \text{ mm}, \quad \delta h=-0{,}001 \text{ mm};$$
$$R_0=100 \text{ mm}, \quad \delta R=+0{,}005 \text{ mm};$$

$$H=50-0{,}002=49{,}998 \text{ mm};$$
$$h=20+0{,}001=20{,}001 \text{ mm};$$
$$R=100-0{,}005=99{,}995 \text{ mm};$$

$$\sin\alpha_0=\frac{50-20}{100}=0{,}30; \quad \alpha_0=17°27'27''; \quad \operatorname{tg}\alpha_0=0{,}3145.$$

$$\delta\alpha=0{,}3145\left(\frac{0{,}002+0{,}001}{30}-\frac{0{,}005}{100}\right)=\frac{3{,}145}{200\,000}\approx+3''; \quad \alpha_0=\alpha-\delta\alpha.$$

Așadar, unghiul α este cu 3" mai mare decît unghiul care s-a calculat din valorile nominale ale lui H, h, R. Valoarea corectată (actuală) a unghiului este deci

$$\alpha=17°27'30''.$$

3. Să se determine diametrul D al unui cilindru, cunoscînd săgeata h corespunzătoare unei coarde S.

Din relația cunoscută în triunghiul dreptunghic înscris în cercul de secțiune a cilindrului, avem evident:

$$\left(\frac{S}{2}\right)^2=(D-h)h=Dh-h^2,$$

de unde rezultă expresia diametrului

$$D=\frac{S^2}{4h}+h.$$

Regula de formare a diferențialei ne dă

$$\delta D=\frac{S}{2h}\delta S-\frac{S^2}{4h^2}\delta h+\delta h=\frac{S}{2h}\delta S-\left(\frac{S^2}{4h^2}-1\right)\delta h.$$

Numeric: $S_0=500$ mm (valoare nominală); $h_0=50$ mm (valoare nominală). Rezultă $D_0=1\,300$ mm.

Fie $\delta S=+1$ mm; $\delta h=-0{,}1$ mm. Rezultă: $\delta D=7{,}4$ mm.

Așadar, valoarea reală (actuală) a diametrului este

$$D=D_0+\delta D=1\,307{,}4 \text{ mm},$$

Scanned with OKEN Scanner

4. Să se determine altitudinea h prin formula de nivelment trigonometric: $h=D\,\mathrm{tg}\,\alpha$, în care D este distanța de la lunetă la mină și α unghiul observat. Prin diferențiere logaritmică avem

$$\frac{\delta h}{h}=\frac{\delta D}{D}+\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}\,\frac{\delta\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

Numeric:

$$D=124{,}18\text{ m};\quad \delta D=+0{,}03\text{ mm};\quad \alpha=19°41'30'';$$

$$\delta\alpha=40''=\frac{40}{206\,280};\quad \mathrm{tg}\,\alpha=0{,}36;\quad \cos^2\alpha=0{,}942.$$

Se obține:

$$\delta h=0{,}002;\quad h=23{,}705+0{,}002=23{,}707\text{ mm}.$$

§ 28. Prelucrarea practică a unui șir de măsurători de egală precizie, ținînd seama de „rotunjirea" rezultatelor

Operațiile de prelucrare practică a rezultatelor constau din

a) Determinarea celei mai bune valori din șirul obținut pentru mărimea măsurată, adică a valorii pentru care influența erorilor întîmplătoare să fie minimă.

Această operație se numește *compensarea* măsurătorii.

Dacă se dă un șir de măsurători de egală precizie, știm că se ia drept cea mai bună valoare a mărimii considerate media aritmetică a valorilor $l_1, l_2, \ldots, l_n$ măsurate

$$L=\frac{[l]}{n}.$$

În practică, însă, atunci cînd avem suficient de numeroase valori $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (adică n suficient de mare), compensarea se ușurează dacă se ia în locul valorilor brute $l_1, l_2, \ldots, l_n$, o valoare aproximativă, rotunjită, a acestor valori, l', numită valoare *rotunjită*. Asupra condițiilor în care se determină o astfel de valoare revenim în paragraful următor.

Fie l' o astfel de valoare rotunjită, pe care s-o luăm ca valoare de referință și să formăm diferențele:

$$\delta l_1=l_1-l',\quad \delta l_2=l_2-l',\quad \ldots,\quad \delta l_n=l_n-l'. \tag{86}$$

Sumînd șirul de egalități (86) și împărțind prin n, deducem

$$\frac{[l]}{n}=l'+\frac{[\delta l]}{n};$$

așadar,

$$L=l'+\frac{[\delta l]}{n}, \tag{87}$$

formulă utilă pentru controlul calculului valorii medii.

Scanned with OKEN Scanner

b) Calculul erorii medii pătratice a măsurătorilor individuale după formula lui Bessel (67), urmînd ca pentru ușurarea calculului de control să fie utilizată formula lui Peters (74). Observăm că pentru calculul lui $[v^2]$ putem folosi o expresie mai simplă, precum urmează

$$[v^2]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=v_1(l_1-L)+v_2(l_2-L)+\cdots+v_n(l_n-L)=$$
$$=[lv]-[v]L=[lv];$$

așadar

$$[v^2]=[lv]. \tag{88}$$

Dacă, însă, calculul se efectuează pe baza valorii aproximative — valoarea rotunjită — a rezultatului fiecărei determinări individuale, formula (88) se simplifică, precum urmează: observăm că din

$$l_1=l'+\delta l_1,\ l_2=l'+\delta l_2,\ \cdots,\ l_n=l'+\delta l_n, \tag{89}$$

prin adunare, după ce am înmulțit cu $v_1, v_2, \ldots, v_n$, rezultă

$$[lv]=l'[v]+[\delta l\cdot v]=[\delta l\cdot v]$$

și deci

$$[v^2]=[\delta l\cdot v]. \tag{90}$$

c) Calculul erorii medii pătratice a mediei aritmetice, după formula (57) sau după formula (68).

Exemplu numeric. Tabela care ne arată dispoziția calculului este:

Nr. crt.	l	δl	v	v^2	$\delta l\cdot v$
1	85°42'50"	+6"	+4"	16	+24
2	42	—2	—4	16	+ 8
3	46	+2	0	0	0
4	44	0	—2	4	0
5	48	+4	+2	4	+ 8
	$l'=85°42'44"$	+10"	$[v]=0$	$[v^2]=40$	$[\delta l\cdot v]=+40$
	$L=85°42'46"$	$\frac{[\delta l]}{n}=+2$	$[\lvert v\rvert]=12.$		

După formula (87) rezultă valoarea care coincide cu cea calculată direct prin formula (77)

$$L=85°42'44"+2"=85°42'46";$$

după formula (67) avem

$$m=\pm\sqrt{\frac{40}{4}}=\pm 3{,}2",$$

Scanned with OKEN Scanner

iar după formula (76)

$$m = \pm 1{,}253\ \frac{12}{4{,}5} = \pm 3{,}3'',$$

ceea ce constituie o concordanță mulțumitoare.

Pentru determinarea erorii M folosim formulele (57), respectiv (68):

$$M = \pm \frac{3{,}2''}{\sqrt{5}} = \pm \sqrt{\frac{40}{20}} = \pm 1{,}4''.$$

Rezultatul definitiv se scrie, prin convenție, în forma care indică cea mai bună valoare și eroarea acestei valori:

$X = 85°45'46'' \pm 1{,}4''$ (valoare adevărată prezumtivă).

§ 29. Operația de „rotunjire" și noțiunea de precizie

Admitem, încă fără o justificare teoretică mai amănunțită, că precizia totală a unei măsurători este indicată de eroarea medie pătratică a valorii mediei aritmetice a rezultatului acelei determinări. În mod analog, admitem că precizia unei determinări individuale este indicată prin eroarea medie pătratică individuală.

Justificarea teoretică a noțiunii de *precizie* o vom face în teoria calculului probabilităților: cu cît eroarea este mai mică, cu atît precizia este mai mare, deci măsurătoarea este mai bună.

Pentru moment, observăm că valoarea acestei precizii este importantă în evaluarea însăși a rezultatului unei măsurători. În adevăr, eroarea este măsura inexactității ultimelor cifre semnificative ale valorii numerice a mărimii măsurate. Precizia determină eroarea tolerată, care ne arată cîte cifre este necesar să fie păstrate în valoarea numerică respectivă, deoarece nu are sens să păstrăm, peste ordinul de mărime al erorii tolerate, prea multe cifre care îngreunează calculul. În cazurile unor măsurători de foarte mare exactitate, sau cînd rezultatele obținute vor fi folosite mai departe, în calculele ulterioare, tehnica de calcul aproximativ ne indică păstrarea unei singure cifre dincolo de ordinul de mărime al cifrei erorii tolerate, drept cifră de orientare.

Foarte important este că, în operația de rotunjire, simplificarea rezultatului trebuie făcută în deplină concordanță cu precizia acestui rezultat, adică valoarea numerică a rezultatului trebuie să se termine, obligator, cu o cifră de același ordin de mărime ca și valoarea erorii tolerate.

În operația de rotunjire trebuie să ne conducem după regulile calculului aproximativ și anume:

a) la numerele întregi, cifrele care prisosesc se înlocuiesc cu zerouri, iar la fracții zecimale aceste cifre se suprimă;

Scanned with OKEN Scanner

b) dacă prima dintre cifrele înlocuite cu zero sau suprimate este mai mică decît 5, cifrele păstrate nu se schimbă;

c) dacă prima dintre cifrele înlocuite cu zero sau suprimate este egală sau mai mare decît 5, iar cifrele următoare sînt diferite de zero, ultima cifră păstrată se mărește cu o unitate;

d) dacă cifra 5 se înlocuiește cu zero, sau este suprimată singură ori împreună cu cifrele zero care urmează, atunci ultima cifră menținută în numărul rotunjit rămîne neschimbată dacă este cifră cu soț, sau se mărește cu o unitate dacă este cifră fără soț; ceea ce constituie așa-numita rotunjire pînă la cea mai apropiată cifră cu soț, în avantajul ușurării calculelor ulterioare.

Exemple de rotunjire. Presupunem că s-au obținut următoarele rezultate

$$l_1 = 1\,254{,}75 \pm 0{,}033,$$
$$l_2 = 372{,}473 \pm 0{,}128,$$
$$l_3 = 456{,}32 \pm 0{,}95,$$
$$l_4 = 127\,557 \pm 678.$$

Este mai comod să se scrie valorile rotunjite în modul următor

$$l_1 = 1\,254{,}75 \pm 0{,}033 \text{ sau } 1\,254{,}75 \pm 0{,}03,$$
$$l_2 = 372{,}47 \pm 0{,}13,$$
$$l_3 = 456{,}3 \pm 1{,}0,$$
$$l_4 = 127\,600 \pm 700 \quad \text{sau } (1\,276 \pm 7) \cdot 10^2.$$

Dacă, din diferite motive, rezultatul este scris fără indicația erorii, rotunjirea trebuie făcută astfel, încît numai ultima cifră menționată să fie dubioasă; adică ordinul ultimei cifre menținute să coincidă cu ordinul primei cifre semnificative a celei mai mari erori posibile a rezultatului.

Uneori, dacă valoarea numerică se exprimă printr-o fracție zecimală, cifra de orientare păstrată se înscrie ceva mai jos. Astfel, $x = 1{,}01878$, cu cea mai mare eroare admisă 0,0000038, se scrie mai ușor $x = 1{,}01878_4$.

În rezumat, trebuie ca rotunjirea să nu depășească în nici un caz eroarea tolerată calculată sau indicată a valorii mărimii considerate.

§ 30. Principiul măsurătorilor ponderate

Presupunem că din măsurarea unei mărimi anumite s-au obținut următoarele n valori *independente* între ele:

$$l_1, l_2, \cdots, l_n, \tag{91}$$

fiecare determinare individuală fiind afectată de erorile reale

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n,$$

astfel încît, dacă X este valoarea adevărată a mărimii considerate, valoare pe care nu o cunoaștem, avem după § 1:

$$\Delta_1 = l_1 - X, \ \Delta_2 = l_2 - X, \ \cdots, \ \Delta_n = l_n - X. \tag{92}$$

Scanned with OKEN Scanner

Principiul fundamental al teoriei măsurătorilor ne spune, după cum știm, că, în locul valorii adevărate, necunoscută, X, se ia, în conformitate cu metodele descrise pînă acum, o valoare pe care o vom nota cu $\mathfrak{L}$ și care trebuie să fie cea mai apropiată de valoarea adevărată; această valoare se obține, evident, printr-o anumită combinație funcțională a valorilor șirului (91). Putem scrie deci, în general

$$\mathfrak{L}=F(l_1, l_2, \cdots, l_n). \tag{93}$$

Este clar că cea mai bună combinație care ar trebui să definească funcția căutată F ar trebui să satisfacă condiția de măsurătoare perfectă

$$F(l_1, l_2, \cdots, l_n)=X, \tag{94}$$

adică $\mathfrak{L}$ să fie riguros egal cu valoarea adevărată, ceea ce nu este posibil practic. De aceea, căutăm să determinăm forma funcției F sub condiția (94), care devine astfel o ecuație funcțională. În acest scop, derivăm ecuația (94) în raport cu X; obținem

$$\frac{\partial F}{\partial l_1}\frac{\partial l_1}{\partial X}+\frac{\partial F}{\partial l_2}\frac{\partial l_2}{\partial X}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial l_n}\frac{\partial l_n}{\partial X}=1. \tag{95}$$

Dar, după relațiile (92), prin derivare parțială care indică faptul că valorile $l_1, l_2, \ldots, l_n$ variază în raport cu X, păstrînd invariabile mărimile $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$, deducem

$$\frac{\partial l_1}{\partial X}=\frac{\partial l_2}{\partial X}=\cdots=\frac{\partial l_n}{\partial X}=1.$$

În aceste condiții, relația (95) devine

$$\frac{\partial F(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\partial l_1}+\frac{\partial F(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\partial l_2}+\cdots+\frac{\partial F(l_1, l_2, \cdots, l_n)}{\partial l_n}=1, \tag{96}$$

care este o ecuație diferențială cu derivate parțiale, liniară. Dar din teoria acestor ecuații se știe că integrala generală a ecuației (96) se obține din integralele prime ale sistemului echivalent

$$\frac{dl_1}{1}=\frac{dl_2}{1}=\cdots=\frac{dl_n}{1}=\frac{dF}{1},$$

de unde, în virtutea proprietăților rapoartelor egale, deducem

$$\frac{C_1\cdot dl_1+C_2\cdot dl_2+\cdots+C_n\cdot dl_n}{C_1+C_2+\cdots+C_n}=\frac{dF}{1}, \tag{97}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante de integrare arbitrare, dar care se determină prin condiții suplimentare.

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația precedentă (97) este satisfăcută, evident, pentru

$$F(l_1, l_2, \cdots, l_n) = \frac{C_1 l_1}{C_1+C_2+\cdots+C_n} + \frac{C_2 l_2}{C_1+C_2+\cdots+C_n} + \cdots + \frac{C_n l_n}{C_1+C_2+\cdots+C_n} + C$$

sau

$$F(l_1, l_2, \cdots, l_n) = C_1' l_1 + C_2' l_2 + \cdots + C_n' l_n + C, \quad (98)$$

unde constantele $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ satisfac condiția

$$C_1' + C_2' + \cdots + C_n' = 1. \quad (99)$$

Dar, în cazul particular $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = X$, din formulele (98) și (99) rezultă

$$(C_1' + C_2' + \cdots + C_n') X + C = X$$

și prin urmare

$$C = 0. \quad (100)$$

Pentru rezolvarea problemei noastre este suficient ca, din integralele generale (91), să ne mărginim la acele integrale pentru care constantele $C_1', C_2', \cdots, C_n'$ sînt esențial pozitive. Dar atunci, după condițiile (92), ele vor trebui să fie niște mărimi subunitare

$$C_1' = \frac{p_1}{S}, \quad C_2' = \frac{p_2}{S}, \quad \cdots, \quad C_n' = \frac{p_n}{S}, \quad (101)$$

unde $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sînt mărimi pozitive.

Din (101) și (98) rezultă pentru mărimea S

$$S = p_1 + p_2 + \cdots + p_n. \quad (102)$$

În aceste condiții, ecuația de definiție (93) a celei mai bune valori măsurate, care trebuie luată în locul valorii adevărate X, este după formulele (98), (101) și (102)

$$\mathfrak{L} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \frac{[p_i]}{[p]}. \quad (103)$$

Am introdus notația $\mathfrak{L}$ pentru media aritmetică ponderată, numită și medie aritmetică generală, spre a o distinge de media aritmetică simplă, notată cu L.

Să considerăm, pe de altă parte, eroarea valorii $\mathfrak{L}$ față de valoarea adevărată X

$$\lambda = \mathfrak{L} - X. \quad (104)$$

Scanned with OKEN Scanner

Înlocuind valorile experimentale $l_1, l_2, \ldots, l_n$ din expresiile (92) în expresia (103), rezultă

$$\mathfrak{L} = \frac{[pl]}{[p]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i (X + \Delta_i)}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = X + \frac{[p\Delta]}{[p]}.$$

Comparînd această relaţie cu relaţia (104), deducem pentru *eroarea mediei aritmetice ponderate* (spre deosebire de eroarea mediei aritmetice simple, δ)

$$\lambda = \frac{p_1 \Delta_1 + p_2 \Delta_2 + \cdots + p_n \Delta_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}. \tag{105}$$

Formulele (103) şi (105) sînt pasibile de interpretări deosebit de interesante pentru studiul erorilor accidentale.

Observaţie. În primul rînd, observăm că aceste formule se prezintă sub un aspect perfect identic cu formula care exprimă vectorul de poziţie al centrului de masă $\bar{r}_G$ al unui sistem de puncte materiale de mase $m_1, m_2, \ldots, m_n$ distribuite discret, avînd ca vectori de poziţie $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_n$

$$\bar{r}_G = \frac{m_1 \bar{r}_1 + m_2 \bar{r}_2 + \cdots + m_n \bar{r}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}. \tag{106}$$

Pentru a trece de la mase la greutăţi, înmulţim numărătorul şi numitorul fracţiei din membrul al doilea cu acceleraţia greutăţii g, în conformitate cu relaţia de definiţie a greutăţii unui corp material de masă m

$$p = mg,$$

astfel încît formula (106) devine

$$\bar{r}_G = \frac{p_1 \bar{r}_1 + p_2 \bar{r}_2 + \cdots + p_n \bar{r}_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \tag{107}$$

relaţie care exprimă vectorul de poziţie al *centrului de greutate* G al sistemului de puncte materiale considerat.

Analogia formulelor (103) şi (105) cu formula (107) a condus la denumirea de *greutate* sau *pondere*, pentru mărimile $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

De aceea, valoarea $\mathfrak{L}$ definită prin expresia (103) se numeşte *medie aritmetică ponderată* sau *medie aritmetică generală* a mărimii supusă măsurătorii, spre deosebire de media aritmetică simplă definită în § 12, care rezultă din formula (96) pentru măsurători de egală precizie, sau de egală pondere

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p.$$

Este evident că în cele mai multe cazuri nu toate operaţiile de măsurătoare sînt la fel de precise sau demne de aceeaşi încredere, fie din cauza împreju-

Scanned with OKEN Scanner

rărilor exterioare în care ele au decurs, fie din cauză că nu se poate atribui tuturor operațiilor același grad de încredere.

Stabilirea ponderilor pe baza examinării tuturor împrejurărilor în care s-au efectuat măsurătorile este o problemă grea, observă M. F. Malikov. Această examinare presupune că cercetătorul care a întreprins o astfel de lucrare posedă cunoștințe serioase, are o experiență susținută în executarea măsurătorilor și cunoaște bine teoria erorilor.

Analiza rezultatelor necesită o critică amănunțită, multilaterală, a tuturor datelor care privesc: gradul de perfecție a metodelor de măsurare, eliminarea erorilor sistematice, starea și natura aparatelor utilizate, precum și influența mediului exterior și a celorlalte împrejurări. Aceste analize trebuie făcute cît mai imparțial posibil, fără păreri preconcepute în legătură cu valoarea adevărată presupusă că ar avea-o mărimea măsurată, căci aceasta ar îndemna la atribuirea de ponderi micșorate arbitrar pentru rezultatele care se deosebesc vădit de valoarea adevărată bănuită, în dauna calității datelor experimentale care se referă la aceste determinări.

Calculatorul trebuie să evite de a atribui ponderi mari observațiilor a căror perturbare este provocată de cauze care-i sînt cunoscute, în dauna observațiilor ale căror cauze de perturbare nu-i sînt clare.

Este cu neputință să se preconizeze reguli anumite pentru stabilirea ponderilor și reguli menite să servească drept îndreptar pentru observator, în evaluarea factorilor care se prezintă în diferitele condiții de măsurare. În general, nu se vor introduce în calcule rezultate care se deosebesc calitativ prea mult între ele, sau rezultate obținute prin metode puțin sensibile.

Din considerațiile precedente se constată că, dacă nu se pot formula reguli strict definite, totuși se pot construi unele criterii intuitive după care alegerea ponderii să fie suficient de bine justificată.

În concluzie, *calitatea* unei măsurători se manifestă în calcul prin introducerea ponderii după următorul criteriu general: cu cît rezultatul unei determinări individuale este mai bun, cu atît greutatea (adică ponderea) acestui rezultat este mai mare; ca și cum *rezultatul respectiv s-ar fi obținut, repetat, de un număr de ori egal cu ponderea corespunzătoare.*

Această observație ne conduce la *criteriul măsurătorilor imaginare* (fictive).

Să presupunem că avem un șir de determinări reale

$$l_1, l_2, \cdots, l_n,$$

afectate de ponderile

$$p_1, p_2, \cdots, p_n.$$

În conformitate cu criteriul enunțat mai sus, admitem că rezultatul l_1 este media aritmetică simplă a p_1 operații imaginare de egală precizie, cu rezultatele $a_1, a_2, \ldots, a_{p_1}$, astfel încît:

$$l_1 = \frac{[a]}{p_1}; \quad [a] = p_1 l_1. \tag{108}$$

Apoi, l_2 poate fi considerat ca media aritmetică simplă a p_2 operații imaginare de egală precizie, cu rezultatele $b_1, b_2, \ldots, b_{p_2}$, astfel încît

$$l_2 = \frac{[b]}{p_2}; \quad [b] = p_2 l_2 \tag{109}$$

și așa mai departe, pînă la valoarea l_n, care poate fi considerată ca fiind media aritmetică a p_n operații de egală precizie, cu rezultatele $u_1, u_2, \ldots, u_{p_n}$, astfel încît

$$l_n = \frac{[u]}{p_n}; \quad [u] = p_n l_n . \tag{110}$$

Pentru a aplica criteriul precedent, trebuie să scriem formula cunoscută a mediei aritmetice ponderate:

$$\mathfrak{L} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

și, ținînd seamă de relațiile (108), (109), (110), rezultă că putem scrie

$$\mathfrak{L} = \frac{[a] + [b] + \cdots + [u]}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}; \tag{111}$$

adică media ponderată se poate construi din grupări de măsurători parțiale, în care se poate descompune operația totală de măsurare. Această proprietate constituie criteriul practic al grupării operațiilor parțiale pentru obținerea mediei aritmetice ponderate și permite o alegere logică și justă a ponderilor corespunzătoare.

Concretizăm acest criteriu prin exemplele următoare.

Exemple numerice. 1. Un unghi a fost măsurat de cinci ori, în modul următor: prima oară prin 3 observații, obținîndu-se valoarea medie simplă 3°8′10″; a doua oară prin 6 observații, obținîndu-se media simplă 3°8′8″; a treia oară prin 9 observații, cu media simplă 3°8′6″; a patra oară prin 12 observații, cu media simplă 3°8′4″ și a cincea oară prin 15 observații, cu media simplă 3°8′0″.

Valoarea cea mai probabilă a unghiului este valoarea medie aritmetică ponderată, admițînd că ponderile determinărilor parțiale sînt proporționale cu numărul respectiv de determinări: $p_1 = 3$, $p_2 = 6$, $p_3 = 9$, $p_4 = 12$, $p_5 = 15$. Apoi, observînd că numerele p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 admit ca divizor comun pe 3, le vom simplifica prin 3 și obținem valoarea medie ponderată pentru unghiul considerat:

$$\mathfrak{L} = 3°8′ + \frac{10″ \cdot 1 + 8″ \cdot 2 + 6″ \cdot 3 + 4″ \cdot 4 + 0″ \cdot 5}{1 + 2 + 3 + 4 + 5} = 3°8′4″.$$

2. Să admitem că din măsurarea unui unghi s-a obținut 9°52′, iar pentru secunde: 6″, 14″, 4″, 5″ și 1″.

Media aritmetică simplă a tuturor acestor măsurători este

$$L = 9°52′ + \frac{6 + 14 + 4 + 5 + 1}{5} = 9°52′6″.$$

Putem însă împărți șirul celor cinci măsurători în grupe mai mici, de exemplu, în două grupe: prima grupă conținînd primele trei determinări, iar a doua grupă restul de două determinări. Făcînd media pe grupe obținem:

$$9°52′ + \frac{6 + 14 + 4}{3} = 9°52′8″$$

Scanned with OKEN Scanner

$$9°52'+\frac{5+1}{2}=9°52'3''.$$

Aceste medii pot fi privite ca rezultate noi pentru determinarea mărimii considerate, dar este evident că ele nu mai posedă acelaşi grad de precizie; ponderea primului rezultat în secunde este 3, iar a celui de-al doilea număr de secunde este 2, astfel încît media aritmetică ponderată este:

$$\mathfrak{L}=9°52'+\frac{8\cdot 3+3\cdot 2}{3+2}=9°52'6'',$$

valoare riguros egală cu valoarea $\mathfrak{L}$ găsită anterior, ceea ce era de aşteptat.

§ 31. Proprietăţi ale ponderilor deduse din teoremele asupra erorii medii pătratice

Din însuşi modul cum au fost introduse mărimile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ în calcul, prin relaţiile (101), se constată că aceste mărimi posedă numai valori *relative*, de proporţionalitate. În adevăr, dacă în formulele (103) şi (105) punem în locul mărimilor p_i mărimile Kp_i, rezultatele nu se schimbă. Această proprietate a fost utilizată în primul exemplu precedent, unde am simplificat prin divizorul comun 3.

Dar această proprietate generală ne permite să formulăm teorema: *ponderile sînt invers proporţionale cu pătratele erorilor medii pătratice ale mediei aritmetice simple.*

În adevăr, să considerăm relaţia (§ 23)

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}, \tag{112}$$

care exprimă eroarea medie pătratică M a mediei aritmetice simple a unui număr de n determinări independente şi de egală precizie, fiecare fiind afectată de o eroare medie pătratică individuală egală cu m.

După observaţia de mai sus, numărul de determinări n poate fi considerat drept pondere astfel încît, pentru cazurile $n=p$ şi $n=p'$, relaţia (112) ne dă

$$M=\frac{m}{\sqrt{p}}, \quad M'=\frac{m}{\sqrt{p'}}, \tag{113}$$

de unde, ridicînd la pătrat şi împărţind, obţinem teorema enunţată

$$\frac{p}{p'}=\frac{M'^2}{M^2}; \quad \frac{M}{M'}=\frac{\sqrt{p'}}{\sqrt{p}}, \tag{114}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce se mai poate scrie

$$M=C\frac{1}{\sqrt{p}},\quad M'=C\frac{1}{\sqrt{p'}},\tag{115}$$

unde C este o constantă de proporționalitate nedeterminată.

Ponderea unei mărimi determinată indirect se deduce din ponderile mărimilor determinate direct, după cum urmează.

Fie, după § 21, o mărime Z definită prin funcția liniară

$$Z=K_1X_1+K_2X_2+\cdots+K_NX_N,\tag{116}$$

unde mărimile $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sînt determinate direct, cu ponderile $P_1, P_2, \ldots, P_N$.

Se cere să determinăm ponderea P_Z a mărimii Z, dată de (116). În acest scop, observăm că relațiile (115) ne dau

$$M_Z^2=\frac{C^2}{P_Z};\quad M_1^2=\frac{C^2}{P_1},\quad M_2^2=\frac{C^2}{P_2},\quad \ldots,\quad M_N^2=\frac{C^2}{P_N}.$$

Simplificînd pe C^2 după formula (49) se obține

$$\frac{1}{P_Z}=\frac{K_1^2}{P_1}+\frac{K_2^2}{P_2}+\cdots+\frac{K_N^2}{P_N}=\left[\frac{K^2}{P}\right].\tag{117}$$

În cazul $K_1=K_2=\ldots=K_N=1$, rezultă

$$\frac{1}{P_Z}=\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\cdots+\frac{1}{P_N}=\left[\frac{1}{P}\right]$$

și pentru $P_1=P_2=\cdots=P_N=P$ se obține

$$\frac{1}{P_Z}=N\frac{1}{P};\quad P_Z=\frac{1}{N}P.\tag{118}$$

Este evident că formulele (116), (117), (118) se aplică și cazului general tratat în § 22.

Exemplu. Fie să determinăm ponderea funcției

$$Z=XY,$$

cunoscînd ponderile P_X și P_Y ale argumentelor. Putem scrie

$$K_1=\frac{\partial Z}{\partial X}=Y;\quad K_2=\frac{\partial Z}{\partial Y}=X.$$

Scanned with OKEN Scanner

Aşadar,

$$\frac{1}{P_Z} = Y^2 \frac{1}{P_X} + X^2 \frac{1}{P_Y};$$

sau, dacă $P_X = P_Y = P$, se obţine

$$P_Z = \frac{P}{X^2 + Y^2}. \tag{119}$$

§ 32. Proprietăţile erorilor aparente ponderate

a) Să considerăm un şir de n determinări individuale pentru o mărime dată

$$l_1, l_2, \ldots, l_n,$$

cu ponderile individuale

$$p_1, p_2, \ldots, p_n.$$

Valoarea cea mai probabilă fiind media aritmetică ponderată

$$\mathfrak{L} = \frac{[pl]}{[p]},$$

să formăm erorile aparente ponderate

$$\begin{aligned} v_1 &= l_1 - \mathfrak{L} \text{ cu ponderea } p_1 \\ v_2 &= l_2 - \mathfrak{L} \text{ cu ponderea } p_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_n &= l_n - \mathfrak{L} \text{ cu ponderea } p_n. \end{aligned} \tag{120}$$

Înmulţind egalităţile (120) cu ponderile respective, adunînd rezultatele şi ţinînd seamă de definiţia (103), rezultă prima proprietate a erorilor aparente ponderate

$$[pv] = 0. \tag{121}$$

Aşadar, *suma algebrică a produselor erorilor aparente cu ponderile corespunzătoare este egală cu zero.*

b) O altă proprietate este: *suma pătratelor erorilor aparente înmulţite cu ponderile corespunzătoare are o valoare minimă*

$$[pv^2] = \text{minim}. \tag{122}$$

Această proprietate ne spune că, dacă vom lua oricare altă valoare de referinţă $\mathfrak{L}'$, în locul mediei aritmetice ponderate dată de relaţia (115), şi vom calcula erorile faţă de această valoare de referinţă, suma pătratelor acestor erori, multiplicate prin ponderile corespunzătoare, va fi mai mare decît aceeaşi sumă construită cu

Scanned with OKEN Scanner

erorile față de media aritmetică $\mathfrak{L}$ luată ca valoare de referință. În adevăr, avem

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (l_i - \mathfrak{L}')^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i (l_i - \mathfrak{L})^2 = (\mathfrak{L}'^2 - \mathfrak{L}^2) \sum_{i=1}^{n} p_i - 2 (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) \sum_{i=1}^{n} p_i l_i =$$

$$= \{\mathfrak{L}'^2 - \mathfrak{L}^2 - 2 (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L}) \mathfrak{L}\} \sum_{i=1}^{n} p_i = (\mathfrak{L}' - \mathfrak{L})^2 \sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant 0, \qquad (123)$$

deoarece ultimul termen al egalităților precedente este esențial pozitiv. Așadar, avem

$$\sum_{i=1}^{n} p_i (l_i - \mathfrak{L}')^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} p_i (l_i - \mathfrak{L})^2, \qquad (124)$$

egalitatea avînd loc pentru $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}$, după cum rezultă din ultima egalitate (123). Relația (124) demonstrează proprietatea enunțată.

c) Pentru $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$, media aritmetică ponderată se reduce la media aritmetică simplă L, iar eroarea medie ponderată se reduce la eroarea medie simplă δ. Aceasta justifică motivul pentru care eroarea medie simplă se efectuează asupra rezultatelor unor măsurători de *egală* precizie, adică de egală pondere.

§ 33. Ponderea mediei aritmetice ponderate

Să aplicăm principiul determinărilor imaginare pentru calculul erorii medii pătratice a mediei aritmetice ponderate.

Fie șirul de n determinări

$$l_1, l_2, \cdots, l_n,$$

afectate de ponderile

$$p_1, p_2, \cdots, p_n.$$

După principiul determinărilor imaginare, considerăm pe l_i drept media aritmetică simplă a p_i determinări de egală precizie, fiecare determinare fiind afectată de aceeași eroare medie pătratică, egală cu m. Dar, pentru o astfel de medie aritmetică simplă, eroarea medie pătratică este dată de formula (70), unde punem succesiv $n = p_1, p_2, \ldots, p_n$; obținem astfel, pentru erorile medii pătratice ale determinărilor $l_1, l_2, \ldots, l_n$, respectiv

$$\frac{m}{\sqrt{p_1}}, \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \cdots, \frac{m}{\sqrt{p_n}}. \qquad (125)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dar, atunci, scriind media aritmetică ponderată sub forma unei funcţii liniare de mărimile $l_1, l_2, \ldots, l_n$, (după (103),

$$\mathfrak{L} = \frac{p_1}{[p]} l_1 + \frac{p_2}{[p]} l_2 + \cdots + \frac{p_n}{[p]} l_n \tag{126}$$

şi aplicînd legea de propagare a erorilor medii pătratice (§ 22) deducem pentru eroarea medie pătratică $\mathcal{M}$ a mediei aritmetice ponderate (126), ţinînd seama de (125):

$$\mathcal{M}^2 = \left(\frac{p_1}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_1}}\right)^2 + \left(\frac{p_2}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{p_n}{[p]} \frac{m}{\sqrt{p_n}}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{m}{[p]}\right)^2 \{(\sqrt{p_1})^2 + (\sqrt{p_2})^2 + \cdots + (\sqrt{p_n})^2\} = m^2 \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{[p]^2} =$$

$$= m^2 \frac{[p]}{[p]^2} = \frac{m^2}{[p]}.$$

Aşadar, în definitiv

$$\mathcal{M} = \frac{m}{\sqrt{[p]}}, \tag{127}$$

formulă care ne arată, prin comparaţie cu formula (112), că ponderea P a erorii medii pătratice $\mathcal{M}$ a mediei artimetice ponderate (126) este

$$P = [p], \tag{128}$$

adică egală cu suma ponderilor parţiale. Pentru

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p \tag{129}$$

rezultă

$$\frac{P}{p} = n, \tag{130}$$

adică ponderea mediei aritmetice ponderate a n determinări avînd aceeaşi pondere dată p este de n ori mai mare decît valoarea unei ponderi parţiale.

§ 34. Introducerea ponderii unitate

În practică, se ia ponderea uneia dintre mărimi egală cu unitatea, de exemplu $p = 1$, deoarece numerele p sînt în realitate nişte rapoarte, adică au valori proporţionale, după cum am observat mai sus.

Dacă în expresia (130) punem $p = 1$, rezultă $P = n$, adică ponderea mediei aritmetice generale este egală cu n, ceea ce ne indică, de fapt, numărul determinărilor de egală precizie din care se com-

Scanned with OKEN Scanner

pune media aritmetică considerată [căci am presupus în (130) că au loc egalitățile (129) care mijlocesc trecerea de la media ponderată la media simplă].

Din considerațiile precedente rezultă că orice rezultat cu ponderea p poate fi tratat ca media aritmetică a unui șir de măsurători de egală precizie, iar ponderea p poate fi privită ca numărul care arată cîte determinări de egală precizie, astfel considerate, trebuie să luăm pentru ca media lor aritmetică să aibă aceeași precizie ca și rezultatul dat.

§ 35. Exemple

1. Un unghi s-a obținut ca diferența a două direcții măsurate cu aceeași precizie. Se cere să se determine ponderea determinării unghiului și a fiecărei direcții.

Dacă eroarea medie pătratică a fiecărei direcții este m, atunci, după formula (47), rezultă că eroarea medie pătratică a determinării unghiului este $m\sqrt{2}$.

Fie p_d ponderea direcțiilor și p_u ponderea unghiului. Rezultă după legea (113)

$$\frac{p_d}{p_u}=\frac{(m\sqrt{2})^2}{m^2}=2;$$

dacă $p_d=1$, avem $p_u=\frac{1}{2}$ și dacă $p_u=1$, avem $p_d=2$.

2. Să se determine ponderea unghiurilor u_1 și u_2, dacă erorile medii pătratice respective sînt $\pm 2''$ și $\pm 8''$.

Avem

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{8^2}{2^2}=\frac{64}{4}=16.$$

Dacă $p_2=1$, avem $p_1=16$; dacă $p_1=1$, avem $p_2=1/16$.

3. Ce pondere are produsul 3α, dacă ponderea lui α este luată egală cu unitatea?

Avem

$$\frac{p_{3\alpha}}{p_\alpha}=\frac{m^2}{(3m)^2}=\frac{1}{9};$$

pentru $p_\alpha=1$, rezultă $p_{3\alpha}=\frac{1}{9}$.

4. Să se găsească ponderea sumei unghiurilor unui triunghi, știind că ponderea determinării unuia din unghiuri este egală cu unitatea.

Avem

$$\frac{p_s}{p}=\frac{m^2}{(m\sqrt{3})^2}=\frac{1}{3};$$

pentru $p=1$, rezultă $p_s=\frac{1}{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 36. Eroarea medie pătratică a unei măsurători care are ponderea egală cu unitatea

Am văzut că, în cazul unui şir de măsurători efectuate cu *aceeaşi precizie*, aprecierea preciziei şirului se face prin eroarea medie pătratică a uneia oarecare dintre măsurătorile individuale care alcătuiesc şirul.

Dacă avem însă de comparat între ele două sau mai multe şiruri de rezultate obţinute prin măsurători efectuate asupra unor mărimi, dar de *inegală precizie*, este necesar să se determine, pentru fiecare şir în parte, eroarea medie pătratică a acelei măsurători individuale pentru care convenim să se ia ponderea egală cu unitatea; această eroare o numim pe scurt *eroarea unităţii de pondere* şi o notăm prin μ.

Fie $l_1, l_2, \ldots, l_n$ şirul de rezultate obţinute din măsurătorile aceleiaşi mărimi, dar de precizii diferite; fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ponderile respective; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ erorile medii pătratice corespunzătoare şi $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ erorile reale ale acestor măsurători.

După teorema demonstrată la § 31: „raportul erorilor medii pătratice a două măsurători individuale este egal cu inversul raportului rădăcinilor pătrate ale ponderilor respective“, şi aplicînd formula (114), avem:

$$\frac{\mu^2}{m^2}=\frac{p}{1},$$

deci

$$\mu=m\sqrt{p}, \tag{131}$$

unde μ este eroarea unităţii de pondere, m eroarea medie pătratică a uneia dintre determinările individuale, iar p ponderea aceleiaşi determinări. Pentru şirul celor n rezultate considerate mai sus, aplicînd formula (131), avem

$$\mu=m_1\sqrt{p_1},\ \mu=m_2\sqrt{p_2},\ \cdots,\ \mu=m_n\sqrt{p_n},$$

de unde, prin ridicare la pătrat şi adunare:

$$n\,\mu^2=m_1^2\,p_1+m_2^2\,p_2+\cdots+m_n^2\,p_n=[m^2\,p]\,.$$

Rezultă deci pentru eroarea unităţii de pondere în funcţie de erorile medii pătratice individuale

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[m^2\,p]}{n}}\,. \tag{132}$$

Putem exprima eroarea unităţii de pondere în funcţie de erorile reale, făcînd uz de noţiunea măsurătorilor imaginare: rezultatul l_1

este considerat ca obținut prin p_i măsurători de egală precizie; este indicat, prin urmare, să considerăm eroarea reală Δ_i ca fiind identică cu eroarea medie pătratică a măsurătorii individuale respective m_i; ceea ce înseamnă că valorile medii pătratice ale erorilor individuale Δ_i sînt tocmai mărimile m_i. Putem scrie atunci din relația (132)

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2 p]}{n}}. \qquad (133)$$

Formulele (132) și (133) ne arată că, o dată cu variația ponderilor respective, se schimbă și eroarea unității de pondere.

§ 37. Eroarea medie pătratică a valorii medii a ponderilor individuale

În unele chestiuni de practică geodezică, cum este problema închiderii în stație, unde este necesar să se cunoască precizia medie obținută la măsurarea unghiurilor în turul de orizont, este indicat să se ia ca unitate de măsură eroarea medie pătratică a ponderii medii, iar nu eroarea medie pătratică a unității de pondere μ, care nu satisface totdeauna condiția de a reprezenta precizia cerută pentru o determinare în stație.

În loc de a se lua în considerare ponderea medie $\frac{1}{n}\,[p]$, este mai indicat să se definească ponderea medie g prin relația

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right].$$

Formula care dă eroarea medie pătratică a mediei ponderate

$$\mathcal{M} = \mu\sqrt{\frac{1}{p}} \qquad (134)$$

ne dă, în cazul de față, pentru eroarea medie pătratică a mediei ponderilor individuale

$$\mathcal{M}_0 = \mu\sqrt{\frac{1}{g}} = \mu\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{p}\right]}. \qquad (135)$$

§ 38. Alte formule pentru eroarea medie pătratică a mediei ponderate

Am notat cu $\mathcal{M}$ eroarea medie pătratică a mediei ponderate, spre deosebire de eroarea medie pătratică M a mediei aritmetice simple (§ 32), iar formula

$$\mathcal{M} = \frac{m}{\sqrt{[p]}} \qquad (136)$$

Scanned with OKEN Scanner

ne dă această valoare în funcţie de eroarea medie pătratică a unei măsurători individuale m şi suma ponderilor. Dacă luăm pentru m chiar eroarea medie pătratică a unităţii de pondere μ, formula precedentă se scrie

$$\mu = \mathcal{M}\sqrt{[p]}\,; \tag{137}$$

de unde, prin comparaţie cu relaţiile (132) şi (133), deducem

$$\mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{[m^2 p]}{n\,[p}}\,, \tag{138}$$

$$\mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{\Delta^2 p}{n\,[p]}}\,. \tag{139}$$

Din aceste formule se constată că, înmulţind sau împărţind numărul ponderilor individuale cu acelaşi număr, eroarea mediei ponderate rămîne neschimbată, ceea ce este de la sine înţeles, deoarece ponderile sînt mărimi determinate pînă la un factor multiplicativ, după cum am văzut cînd le-am introdus.

§ 39. Expresia erorii medii pătratice a unităţii de pondere μ şi a mediei ponderate $\mathcal{M}$ în funcţie de erorile aparente ale măsurătorilor de inegală precizie

După § 30, formula (104), care introduce eroarea mediei aritmetice ponderate $\lambda = \mathcal{L} - X$ şi erorile aparente ponderate v_i, putem scrie pentru n măsurători sau observaţii

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= v_1 + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad \text{cu ponderea } p_1 \\
\Delta_2 &= v_2 + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad \text{cu ponderea } p_2 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_n &= v_n + \lambda \quad . \quad . \quad . \quad \text{cu ponderea } p_n\,.
\end{aligned}$$

Ridicînd la pătrat şi înmulţind respectiv cu $p_1, p_2, \ldots, p_n$, avem

$$\begin{aligned}
\Delta_1^2 p_1 &= v_1^2 p_1 + 2\lambda v_1 p_1 + \lambda^2 p_1\,, \\
\Delta_2^2 p_2 &= v_2^2 p_2 + 2\lambda v_2 p_2 + \lambda^2 p_2\,, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_n^2 p_n &= v_n^2 p_n + 2\lambda v_n p_n + \lambda^2 p_n\,.
\end{aligned}$$

Sumînd, obţinem

$$[\Delta^2 p] = [v^2 p] + \lambda^2 [p] + 2\lambda\,[v\,p]\,;$$

dar, cum după formula (121) avem $[v\ p] = 0$, urmează că

$$[\Delta^2 p] = [v^2 p] + \lambda^2 [p]\,, \tag{140}$$

deci eroarea mediei aritmetice ponderate λ nu este altceva decît eroarea medie pătratică a mediei aritmetice ponderate; aşadar, $\lambda = \mathcal{M}$, iar după relaţia (134) rezultă că

$$\lambda_2 [p] = \mathcal{M}^2 [p] = \mu^2.$$

Introducînd această valoare în relaţia (138), unde ţinem seama de (133), deducem:

$$n\mu^2 = [v^2 p] + \mu^2,$$

sau, în definitiv

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v^2 p]}{n-1}}, \tag{141}$$

ceea ce constituie relaţia căutată. care exprimă eroarea ponderii unitate în funcţie de erorile aparente ponderate v_i. Aplicînd relaţia (99) deducem

$$\mathcal{M} = \pm \sqrt{\frac{[v^2 p]}{[p](n-1)}}. \tag{142}$$

Formula (141) este analogă formulei lui Bessel (67), iar formula (142) este analogă formulei lui Bessel (68). Pentru $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, aceste formule se transformă exact în formulele lui Bessel, căci în acest caz erorile aparente ponderate v_i devin egale cu erorile aparente raportate la media aritmetică simplă, v_i.

Exemplu. Tabelă de calcul pentru valoarea unui unghi ($n=5$).

l	Numărul de şiruri	Ponderea p	v	pv	pv^2
3°8′10″	3	1	+6	+ 6	36
8	6	2	+4	+ 8	32
6	9	3	+2	+ 6	12
4	12	4	0	0	0
0	15	5	−4	−20	80
$\mathfrak{L} = \frac{[pl]}{[p]} = 3°8'4''$		$[p]=15$		$[pv]=0$	$[pv^2]=160$
$\mu = \pm\sqrt{\frac{160}{4}} = \pm 6{,}3''$			$\mathcal{M} = \pm\frac{6{,}3''}{\sqrt{15}} = \pm 1{,}6''$		

Observăm pe tabelă că ponderile p sînt luate proporţionale cu numărul de şiruri care au procurat valorile individuale măsurate $l_1, l_2, \ldots, l_n$.

Dacă s-ar fi luat ca ponderi chiar aceste numere de şiruri (coloana a doua), eroarea unităţii de pondere μ s-ar fi schimbat, dar valoarea erorii mediei

ponderate $\mathcal{M}$ ar fi rămas neschimbată. În cazul nostru numeric, factorul de multiplicitate este evident 3. Rezultă că μ s-ar mări de $\sqrt{3}$ ori, adică ar deveni $\mu = \pm$ 10,9", iar pentru $\mathcal{M}$ am avea

$$\mathcal{M} = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}} = \pm\frac{10{,}9''}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}} = \pm\frac{6{,}3''}{\sqrt{15}} = \pm 1{,}6'',$$

deci aceeaşi valoare găsită direct, ceea ce era de aşteptat.

§ 40. Prelucrarea practică a unui şir de măsurători de inegală precizie. Formulele de control

În practică, avînd mai multe şiruri de măsurători este convenabil adeseori să se procedeze de la început la o rotunjire a rezultatelor numerice procurate de măsurătoare, atîta timp cît cantităţile neglijate nu afectează rezultatul final; aşa cum am arătat mai înainte, mărimea neglijată nu trebuie să depăşească precizia admisă (§ 29).

Fie l_0' o valoare aproximativă obţinută prin ajustare, pentru numărul l_i care rezultă din măsurarea unei mărimi date, drept valoare de referinţă. Notăm diferenţele

$$\delta l_i = l_i - l' \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{143}$$

Înmulţim aceste egalităţi succesiv cu p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, le adunăm şi obţinem

$$[\delta l \cdot p] = [lp] - l'[p].$$

Pentru eroarea medie ponderată rezultă

$$\mathfrak{L} = \frac{[lp]}{[p]} = l' + \frac{[\delta l \cdot p]}{[p]}, \tag{144}$$

care leagă valoarea ajustată l' de valoarea medie ponderată $\mathfrak{L}$.

Se poate deduce o formulă de control pentru calculul erorii medii pătratice a unităţii de pondere, dată de formula (141). În acest scop, observăm că putem scrie:

$$[v^2 p] = v_1^2 p_1 + v_2^2 p_2 + \cdots + v_n^2 p_n = v_1 p_1 (l_1 - \mathfrak{L}) + v_2 p_2 (l_2 - \mathfrak{L}) + \\ + \cdots + v_n p_n (l_n - \mathfrak{L}) = [l v \cdot p] - \mathfrak{L}[v p] = [l v \cdot p];$$

aşadar

$$[v^2 p] = [l v \cdot p]. \tag{145}$$

Pe de altă parte, cum expresia (143) se poate scrie

$$l_i = l' + \delta l_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

după înmulţirea cu $v_i p_i$ şi sumare se deduce

$$[l v \cdot p] = l'[v p] + [\delta l \cdot v p] = 0 + [\delta l \cdot v p];$$

Scanned with OKEN Scanner

aşadar, în cazul în care calculele se fac utilizîndu-se valorile aproximative ale rezultatelor numerice obţinute din măsurători, formula (145) poate fi înlocuită prin formula

$$[v^2 p] = [\delta l \cdot v p], \qquad (146)$$

echivalentă cu formula (88), utilizată în cazul măsurătorilor neponderate.

Exemplu numeric. Tabela calculelor. Determinarea unui unghi.

Numărul observaţiilor	l	Numărul şirurilor	δl	p	$\delta l \cdot p$	v	vp	$v^2 p$	$\delta l \cdot vp$
1	75°18′6″	6	0	1	0	−4	− 4	+ 16	0
2	10	30	+ 4	5	+20	0	0	0	0
3	8	24	+ 2	4	+ 8	−2	− 8	+ 16	− 16
4	16	12	+10	2	+20	+6	+12	+ 72	+120
5	13	12	+ 7	2	+14	+3	+ 6	+ 18	+ 42
6	9	36	+ 3	6	+18	−1	− 6	+ 6	− 18
				20	+80	−	0	+128	+128

$$l' = 75°18'6''; \quad \mathfrak{L} = 75°18'10''.$$

Ponderea p este proporţională cu numărul şirurilor, factorul de proporţionalitate fiind 6, după cum se vede comparînd coloanele a treia şi a cincea.

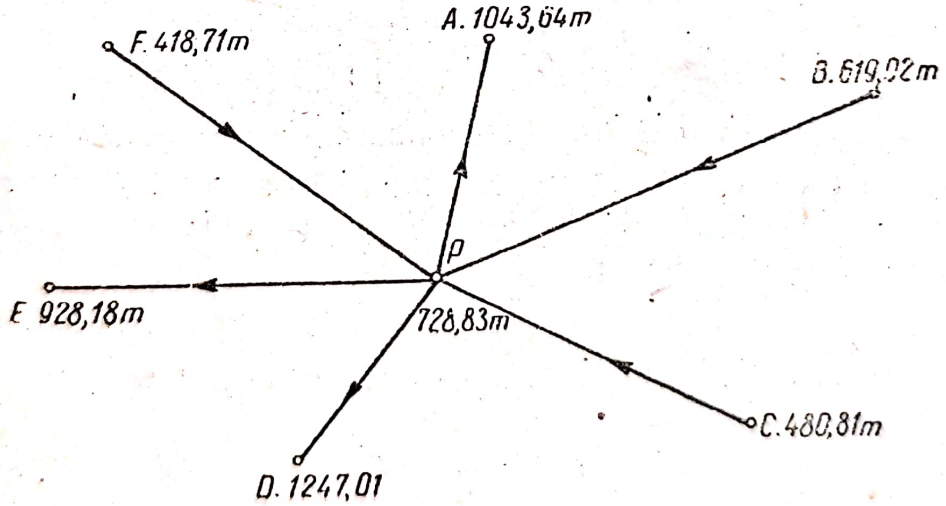


Fig. 3

Formula (144) ne dă $\mathfrak{L} = 75°18'6'' + \frac{80}{20} = 75°18'10''$ după cum rezultă din coloanele a şasea şi a cincea ale tabelei precedente, valoare identică celei calculate direct. Eroarea unităţii de pondere dată de formula (141), avînd

în vedere (145) și valoarea coloanei a zecea din tabelă, ne dă $\mu = \pm\sqrt{\frac{128}{5}} = \pm 5{,}1''$, căci după prima coloană a tabelei, $n=6$.

Formula (142) ne dă cu aceleași date $\mathcal{M} = \pm\sqrt{\frac{128}{100}} = \pm 1.1''$.

Rezultatul final se scrie: $75°18'10'',0 \pm 1{,}1''$.

Exemplu practic, în care ponderile determinărilor individuale nu sînt date de repetiția operațiilor individuale, ci sînt determinate prin însăși natura practică a problemei de rezolvat.

Fie $A\,B\,C\,D\,E\,F$ șase puncte de pe o hartă, avînd ca altitudini deasupra nivelului mării valorile înscrise pe fig. 3, admițînd că aceste valori sînt precise, adică erorile respective sînt neglijabile față de erorile cu care se pot determina cele șase *altitudini*, măsurîndu-se din punctul P unghiurile de altitudine și distanțele corespunzătoare $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ etc. Se cere altitudinea punctului P.

Se obține astfel tabela de date

Distanța S m	Altitudinile date deasupra nivelului mării m	Diferențe de altitudini *măsurate* m	Altitudinile lui P, *calculate* m
$AP = 2010$	$A \ldots 1043{,}64$	$h_1 = -314{,}73$	728,91
$BP = 8903$	$B \ldots 619{,}02$	$h_2 = +109{,}20$	728,22
$CP = 5820$	$C \ldots 480{,}81$	$h_3 = +248{,}24$	729,05
$DP = 3002$	$D \ldots 1247{,}01$	$h_4 = -518{,}43$	728,58
$EP = 6197$	$E \ldots 928{,}18$	$h_5 = -199{,}16$	729,02
$FP = 5800$	$F \ldots 418{,}71$	$h_6 = +310{,}13$	728,84

Media aritmetică simplă a valorilor calculate din ultima coloană este

$$L = 728{,}77 \text{ m},$$

valoare care nu trebuie luată ca rezultat satisfăcător pentru măsurările efectuate, dat fiind că inegalitatea distanțelor punctului P la cele șase puncte A, B, C, D, E, F trebuie să aibă o influență asupra preciziei determinării unghiurilor de altitudine. În adevăr, un calcul simplu trigonometric ne arată că erorile diferențelor de altitudini h sînt aproximativ proporționale cu distanțele respective S, ceea ce înseamnă că ponderile corespunzătoare trebuie să fie invers proporționale cu pătratele distanțelor: $p = \frac{1}{S^2}$, după teorema care ne spune că ponderile sînt invers proporționale cu pătratele erorilor pătratice ale mediei aritmetice.

Alegînd arbitrar unitatea de măsură, de exemplu în km, și luînd valori rotunjite pentru S după coloana întîi a tabelei:

$$S = 2{,}0 \quad 8{,}9 \quad 5{,}8 \quad 3{,}0 \quad 6{,}2 \quad 5{,}8 \text{ km},$$

acestora le corespund ponderile:

$$p = \frac{1}{S^2} = 0{,}25 \quad 0{,}01 \quad 0{,}03 \quad 0{,}11 \quad 0{,}03 \quad 0{,}03,$$

Cu aceste date, tabela de calcul se formează precum urmează

l	p	pl	$v=0{,}83-l$	pv	pv^2
728+0,91	0,25	0,2275	−0,08	−0,0200	0,0016
+0,22	0,01	0,0022	+0,61	+0,0061	0,0037
+1,05	0,03	0,0315	−0,22	−0,0066	0,0015
+0,58	0,11	0.0638	+0,25	+0,0275	0,0069
+1,02	0,03	0,0306	−0,19	−0,0057	0,0011
+0,84	0,03	0,0252	−0,01	−0,0003	0,0000
	$[p]=0{,}46$	$[pl]=0{,}3808$		−0,0336 +0,0326	$[pv^2]=0{,}0148$

$$\mathfrak{L}=\frac{0{,}3808}{0{,}46}=0{,}83.$$

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{0{,}0148}{5}}=\pm 0{,}054\text{ m.}$$

$$\mathcal{M}=\pm\frac{0{,}054}{\sqrt{0{,}46}}=0{,}080\text{ m.}$$

Rezultat:
$728{,}83\pm 0{,}08$ m.

O *analogie mecanică* a formulelor precedente (fig. 4). Să presupunem că bara rigidă orizontală OAB se poate roti în jurul

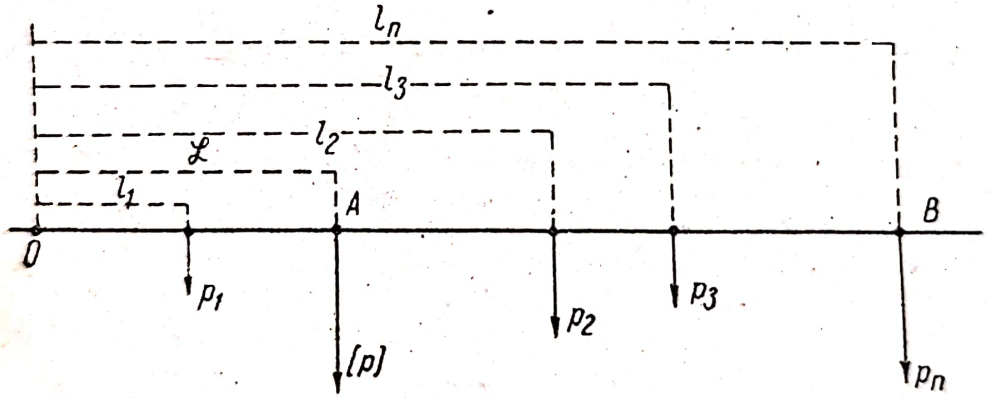


Fig. 4

unui ax care trece prin punctul O, perpendicular pe planul figurii, şi că în diferite puncte ale barei sînt atîrnate greutăţi diferite $p_1, p_2, \ldots, p_n$ la distanţele $l_1, l_2, \ldots, l_n$ de punctul O.
Momentele greutăţilor în raport cu punctul O au respectiv valorile $p_1l_1, p_2l_2, \ldots, p_nl_n$, numite *momente statice*; relaţia

$$\mathfrak{L}=\frac{[pl]}{[p]}$$

Scanned with OKEN Scanner

determină distanța $\mathfrak{L}$ la punctul A, în care se poate aplica suma greutăților $[p]$, astfel încît momentul rezultantei $[p] \cdot \overline{OA}$ să fie egal cu suma momentelor componente, avînd $\overline{OA} = \mathfrak{L}$.

Dacă deplasăm axa de rotație spre B pînă în punctul A, greutățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vor avea față de A distanțele

$$\nu_1 = l_1 - \mathfrak{L}, \quad \nu_2 = l_2 - \mathfrak{L}, \quad \ldots, \quad \nu_n = l_n - \mathfrak{L};$$

astfel încît

$$p_1 \nu_1 + p_2 \nu_2 + \ldots + p_n \nu_n = [p\,\nu] = 0.$$

Prin urmare, punctul A este centrul de greutate al sistemului de mase considerat, ceea ce, de altfel, am specificat chiar în introducerea noțiunii de medie ponderată (§ 30).

Observăm că și suma

$$p_1 \nu_1^2 + p_2 \nu_2^2 + p_3 \nu_3^2 + \ldots + p_n \nu_n^2 = [p\,\nu^2]$$

este susceptibilă de o interpretare mecanică simplă: anume, ea reprezintă *momentul de inerție* al sistemului de mase considerat, în raport cu o axă care trece prin punctul A. Condiția ca $[p\nu^2]$ să fie minimă înseamnă că media ponderată $\mathfrak{L}$ se determină, în sensul mecanicii, drept axa celui mai mic moment de inerție.

§ 41. Influența suprapusă a erorilor întîmplătoare și a erorilor sistematice asupra măsurătorilor

În toate considerațiile precedente am făcut ipoteza că nu există erori sistematice care să influențeze operațiile de măsurători. Adeseori, însă, asemenea erori apar și se suprapun erorilor întîmplătoare, fără ca în prealabil să poată fi eliminate automat din rezultate.

De exemplu, măsurînd o lungime cu o riglă, pe lîngă erorile întîmplătoare se pot ivi și erori sistematice datorite, de exemplu, curburii riglei într-un sens sau altul; erorile provenite din acest defect nu se distrug reciproc, ci, dimpotrivă, ele se sumează în rezultatul total.

Este important însă de observat, după cum am arătat la § 20, că teorema propagării erorilor se aplică și în cazul suprapunerii erorilor sistematice peste erorile întîmplătoare, întrucît noțiunea de eroare medie pătratică nu este condiționată numai decît de probabilitatea egală a erorilor individuale pozitive și negative; putem admite că eroarea medie pătratică constituie un indicativ pentru

Scanned with OKEN Scanner

măsura preciziei, şi pentru determinări în care se ivesc erori sistematice. În acest caz, o eroare medie pătratică în care se constată prezenţa unei părţi provenite din erorile sistematice nu va mai fi introdusă în calcule la fel ca o eroare medie pătratică în care astfel de termeni nu figurează. S-a crezut că această posibilitate de aplicare a metodelor expuse pînă acum şi la operaţii care implică erori sistematice ar constitui un neajuns al metodei; trebuie observat însă că, dimpotrivă, apariţia acestor erori poate fi decelată prin însăşi metoda utilizată, spre a fi apoi eliminate din calculele ulterioare.

Să considerăm un şir de măsurători de egală precizie ale unei mărimi date $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Să notăm erorile reale rezultante ale acestor determinări prin $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, admiţînd că fiecare eroare reală este suma erorii întîmplătoare reale Δ_i şi a erorii sistematice τ_i; avem atunci pentru *erorile rezultante* α_i

$$\alpha_1 = \Delta_1 + \tau_1\,,\quad \alpha_2 = \Delta_2 + \tau_2\,,\quad \cdots,\quad \alpha_n = \Delta_n + \tau_n\,.$$

Ridicînd la pătrat aceste egalităţi, obţinem

$$\alpha_i^2 = \Delta_i^2 + \tau_i^2 + 2\,\Delta_i\,\tau_j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)\,.$$

Observăm că toate produsele de forma $\Delta_i\,\tau_j$ dintre erorile reale întîmplătoare Δ_i şi erorile sistematice τ_j se anulează după condiţia de compensare a erorilor întîmplătoare. Explicitînd egalităţile precedente

$$\begin{aligned}
\alpha_1^2 &= \Delta_1^2 + \tau_1^2\\
\alpha_2^2 &= \Delta_2^2 + \tau_2^2\\
&\cdots\\
\alpha_n^2 &= \Delta_n^2 + \tau_n^2
\end{aligned}$$

şi adunîndu-le, obţinem după împărţire prin n

$$\frac{[\alpha^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\tau^2]}{n}\,,$$

sau cu notaţiile adoptate pentru erorile medii pătratice;

$$m_\alpha^2 = m_\Delta^2 + m_\tau^2\,, \qquad (147)$$

relaţie care răspunde la legea medie pătratică a erorilor (§ 21), unde m_α este eroarea medie pătratică a erorilor rezultante α, iar m_Δ şi m_τ erorile medii pătratice ale erorilor întîmplătoare şi sistematice.

Scanned with OKEN Scanner

§ 42. Determinarea erorii medii pătratice a unui şir de măsurători duble de aceeaşi precizie

Problema se prezintă cînd avem de măsurat diferite lungimi dus-întors, sau porţiuni dintr-un parcurs de nivelment dus-întors fiecare, obţinînd de fiecare dată diferenţele d_i. Admitem că segmentele măsurate sînt egal de lungi, ceea ce înseamnă că diferenţele d_i aparţin la măsurători de aceeaşi precizie.

Fie şirul de n determinări *duble* de aceeaşi precizie

$$l'_1, l''_1; l'_2, l''_2; \cdots; l'_n, l''_n,$$

diferenţele lor fiind

$$d_1 = l'_1 - l''_1, \; d_2 = l_2 - l''_2, \; \cdots, \; d_n = l'_n - l''_n. \tag{148}$$

Dacă măsurătorile ar fi putut să fie executate riguros, fiecare dintre valorile d_i din (148) ar fi nule, ceea ce înseamnă că valoarea precisă a mărimilor d_i este zero. De aici deducem că aceste mărimi $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pot fi considerate drept erorile reale ale mărimii care exprimă diferenţa celor două subşiruri de determinări, cărora le putem aplica noţiunile dezvoltate pentru erorile întîmplătoare. Astfel, eroarea medie pătratică a diferenţelor determinărilor individuale este

$$m_d = \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{149}$$

Pe de altă parte, din teoria propagării erorilor [§ 20, formula (50)], se ştie că eroarea medie pătratică a diferenţei a două mărimi determinate cu egală precizie este dată de formula $m_d = m\sqrt{2}$, unde m este eroarea medie pătratică a unei măsurători individuale din şirul dat; rezultă

$$m = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{150}$$

În adevăr, din $l_i + \Delta_i = l'_i + \Delta'_i$ rezultă

$$d_i = l_i - l'_i = \Delta' - \Delta_i;$$

deci

$$\frac{[d^2]}{n} = \frac{[\Delta^2]}{n} + \frac{[\Delta'^2]}{n}$$

sau

$$\frac{[d^2]}{n} = m^2 + m'^2;$$

Scanned with OKEN Scanner

şi admiţînd că avem o singură măsurătoare $m=m'$

$$\frac{[d^2]}{n}=2m,$$

de unde urmează relaţia (150).

Această formulă poate să procure pentru eroarea medie pătratică individuală m o valoare sensibil micşorată, datorită faptului că diferenţele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pot fi extrem de mici sau chiar nule.

O importanţă deosebită a formulei (150) constă în faptul că ea permite punerea în evidenţă a existenţei erorilor sistematice, şi anume atunci cînd valoarea lui m dată de (150) este mult diferită de zero şi în expresia acestei valori predomină un semn unic.

Pentru un n suficient de mare ne putem aştepta chiar ca suma

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=[d]$$

să fie diferită de zero, dacă există erori sistematice, căci erorile întîmplătoare se compensează şi influenţa lor asupra sumei este neglijabilă. În aceste condiţii, suma $[d]$ serveşte chiar la determinarea valorii medii a erorilor sistematice,

$$d_0=\frac{[d]}{n}. \tag{151}$$

Diferenţele:

$$\Delta d_i=d_i-d_0 \quad (i=1, 2, \cdots, n) \tag{152}$$

trebuie considerate drept *erori aparente*, sau erorile cele mai probabile ale mărimilor $d_1, d_2, \ldots, d_n$ a căror medie aritmetică simplă este d_0.

În consecinţă, după formula lui Bessel [formula (67)], eroarea medie pătratică a unei mărimi d în funcţie de erorile aparente Δd este

$$m_d=\pm\sqrt{\frac{[\Delta d^2]}{n-1}}; \tag{153}$$

ceea ce, înlocuind cu (150), ne dă

$$m_0=\pm\frac{m_d}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta d^2]}{2(n-1)}}. \tag{154}$$

Exemple numerice. 1. Prelucrarea rezultatelor obţinute printr-un şir de măsurători duble de egală precizie, prin cîte şase măsurători individuale ale unor distanţe rectilinii, care formează laturile unui contur poligonal.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela rezultatelor:

Nr.	l', m	l'', m	d, cm	dd	Δd, cm	Δd^2
1	132,45	132,54	− 9	81	−5	25
2	135,21	135,26	− 5	25	−1	1
3	134,77	134,73	+ 4	16	+8	64
4	132.59	132,69	−10	100	−6	36
5	136,58	136,62	− 4	16	0	0
6	134,09	134,09	0	0	+4	16
	$d_0=\frac{[d]}{n}=-\frac{24}{6}=-4$		$[d]=-24$	$[d^2]=238$	$[\Delta d]=0$	$[\Delta d^2]=142$

Întrucît cele șase segmente sînt puțin diferite ca lungime, putem admite că toate perechile de măsurători s-au efectuat cu aceeași precizie. Eroarea medie pătratică a unei măsurători este dată de formula (150), în care erorile sistematice nu sînt eliminate. Se obține

$$m=\pm\sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}=\pm\sqrt{\frac{238}{12}}=\pm 4{,}45 \text{ cm}.$$

Eliminarea erorilor sistematice ne conduce la formula (118); deci,

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{[\Delta d^2]}{2(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{142}{10}}=\pm 3{,}77 \text{ cm}.$$

2. *Aplicație* la măsurarea unei baze geodezice (Bessel). Baza a fost împărțită în două segmente, fiecare fiind măsurat de două ori, cu rezultatele

	Primul segment	Al doilea segment	Media
Prima măsurătoare	441,1852 m	1 381,1571 m	1 822,3447
A doua măsurătoare	441,1839 m	1 381,1632 m	
	$d_1 = +1{,}3$ mm	$d_2 = -6{,}1$ mm	

Dacă luăm distanțele în kilometri $s_1=0{,}441$, $s_2=1{,}381$, $n=2$, și aplicăm formula (150) în care punem ponderea egală cu inversul distanței, avem

$$m_d^2=\frac{1}{4}\left(\frac{d_1^2}{s_1}+\frac{d_2^2}{s_2}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{1{,}3^2}{0{,}441}+\frac{(-6{,}1)^2}{1{,}381}\right)=7{,}70;$$

așadar,

$$m_d=\pm 2{,}78 \text{ mm}.$$

Aceasta este eroarea medie pătratică a unei măsurători a lungimii de 1 km. Eroarea medie pătratică a mediei a două măsurători (dus-întors) a unei lungimi de 1 km este

$$m=\frac{m_d}{\sqrt{2}}=\frac{2{,}78}{\sqrt{2}}=\pm 1{,}97 \text{ mm}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru determinarea erorii medii pătratice M a întregii distanțe $s_1+s_2=$ $=1\,822{,}3\,447$ m, folosim legea propagării erorilor; avem (după cum vom arăta în cap. II)

$$M^2=m^2(s_1+s_2)=\frac{1}{8}\left(\frac{d_1^2}{s_1}+\frac{d_2^2}{s_2}\right)(s_1+s_2),$$

$$M=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{\frac{s_1+s_2}{s_1}d_1^2+\frac{s_1+s_2}{s_2}d_2^2}=\pm 2{,}65\text{ mm}.$$

Lungimea bazei este deci $1\,822{,}3\,447\pm 0{,}0027$ m.

Eliminarea erorilor sistematice. Presupunem că au fost măsurate n unghiuri, fiecare unghi fiind măsurat de cîte p ori cu cercul la dreapta și cercul la stînga, obținîndu-se următoarele n perechi de valori

$$D_1, S_1;\ D_2, S_2;\ \cdots;\ D_n, S_n.$$

Această metodă de măsurare introduce evident erorile sistematice de colimație, care trebuie eliminate cu ajutorul formulei (148), punînd

$$d_1=D_1-S_1,\ d_2=D_2-S_2,\ \cdots,\ d_n=D_n-S_n, \tag{155}$$

astfel încît, după (152), urmează

$$\Delta d_1=d_1-\frac{[d]}{n};\quad \Delta d_2=d_2-\frac{[d]}{n},\ \cdots,\ \Delta d_n=d_n-\frac{[d]}{n}. \tag{156}$$

Formula (154) ne dă

$$m_0=\pm\sqrt{\frac{[\Delta d^2]}{2(n-1)}}. \tag{157}$$

Această formulă ne dă eroarea medie pătratică pentru un grup de p măsurători repetate, iar eroarea medie pătratică a unei singure valori se obține după formula (154)

$$m_1=\pm\frac{m_0}{p}=\pm\frac{1}{p}\sqrt{\frac{[\Delta d^2]}{2(n-1)}} \tag{158}$$

sau, luînd media aritmetică a celor două determinări (dreapta și stînga), avem, după formula (148)

$$m=\frac{m_1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{1}{2p}\sqrt{\frac{[\Delta d^2]}{n-1}}. \tag{159}$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela de calcul a erorii medii pătratice a valorilor unor unghiuri determinate din diferențele dintre măsurătorile citite de același număr de ori, dar cu origini diferite:

Nr.	D	S	d	Δd	Δd^2
1	98° 7,5′	98° 6,2′	+1,3′	+0,3′	0,09
2	102 10,3	102 9,6	+0,7	−0,3	0,09
3	89 46,8	89 45,5	+1,3	+0,3	0,09
4	111 17,1	111 16,6	+0,5	−0,5	0,25
5	90 40,4	90 39,1	+1,3	+0,3	0,09
6	103 7,9	103 7,0	+0,9	−0,1	0,01
	$\frac{[d]}{n}=\frac{6}{6}=1'$		+6,0′	0,0	0,62

Numărul repetițiilor: $p=3$. Numărul unghiurilor: $n=6$. $m=\pm\frac{1}{6}\sqrt{0,124}=\pm 0,06'$.

§ 43. Determinarea erorii medii pătratice a unității de pondere cu ajutorul unui șir de măsurători duble și de precizii inegale

Să considerăm șirul de n perechi de valori obținute prin măsurători de precizii diferite, fiecare pereche în parte fiind însă obținută prin două determinări de aceeași precizie:

$$l_1, l_1''; \; l_2', l_2''; \; \cdots; \; l_n', l_n''.$$

Fie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ponderile fiecăreia dintre cele n perechi și fie

$$d_1=l_1'-l_1''; \; d_2=l_2'-l_2''; \; \cdots; \; d_n=l_n'-l_n''$$

diferențele respective dintre determinările cîte uneia dintre cele n perechi.

Ponderea fiecărei *diferențe* este respectiv

$$\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \ldots, \frac{p_n}{2}.$$

Dat fiind că diferențele $d_1, d_2, \ldots, d_n$ pot fi considerate drept erori reale ale unor determinări cu ponderile $\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \ldots, \frac{p_n}{2}$, eroarea medie pătratică a unității de pondere este, după formula (133)

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{d_1^2\frac{p_1}{2}+d_2^2\frac{p_2}{2}+\cdots+d_n^2\frac{p_n}{2}}{n}}$$

sau

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[d^2p]}{2n}}. \qquad (160)$$

Scanned with OKEN Scanner

În problemele în care este vorba de măsurători de distanțe, ponderea se ia invers proporțional cu distanța $p=\frac{1}{s}$ și formula (160) devine

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{1}{2n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}, \qquad (161)$$

iar eroarea medie pătratică a mediei celor două măsurători este

$$m=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{n}\left[\frac{d^2}{s}\right]}, \qquad (162)$$

care s-a folosit în exemplul 2 din § 42.

Cazul în care diferențele măsurătorilor conțin și erori sistematice. Aceste erori trebuie eliminate. În acest scop, se utilizează o formulă pe care o stabilim după cum urmează.

Fie $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_n$ erorile sistematice ale diferențelor respective. Formăm diferențele

$$\Delta d_1=d_1-\tau_1\,;\ \Delta d_2=d_2-\tau_2\,;\ \cdots;\ \Delta d_n=d_n-\tau_n\,;$$

aceste mărimi nu mai conțin erorile sistematice, pe care le-am scăzut din diferențele $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Prin urmare, mărimile Δd_1, $\Delta d_2, \ldots, \Delta d_n$ pot fi considerate ca erorile aparente ale determinărilor, cu ponderile $\frac{p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \cdots, \frac{p_n}{2}$, după observația din § 33. În aceste condiții, eroarea unității de pondere, după formula (138), este

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[\Delta d^2\cdot p]}{2(n-1)}}. \qquad (163)$$

Exemplu numeric. Tabelă de calcul pentru determinarea erorii medii pătratice a nivelmentului executat pe o distanță de 1 km, luînd diferențele a cîte două măsurători:

Nr.	Diferența d mm	Numărul stațiilor N	$p=\frac{100}{N}$	Eroarea sistematică τ	$\Delta d=d-\tau$	Δd^2	$\Delta d^2\cdot p$
1	− 3	5	20	−1	−2	4	80
2	− 4	10	10	−2	−2	4	40
3	− 6	20	5	−5	−1	1	5
4	+ 2	25	4	−6	+8	64	256
5	−12	40	2,5	−9	−3	9	22
	$[d]=-23$	$[N]=100$			0		403

Scanned with OKEN Scanner

Predominarea semnului minus în valorile diferenţelor scoate în evidenţă existenţa erorilor sistematice, ceea ce face ca suma acestor diferenţe $[d]=-23$ să poată fi privită drept suma erorilor sistematice, afirmaţie cu atît mai justă, cu cît şirul este mai mare.

În exemplul nostru am considerat $[N]=100$ staţii. Eroarea sistematică pentru o staţie este deci $\tau=\frac{[d]}{[N]}=-0{,}23$ mm. Dacă luăm erorile sistematice proporţionale cu numărul staţiilor $\tau_l=\tau N_l$, putem defini aceste erori pentru fiecare drumuire în parte.

Ca unitate de pondere luăm denumirea de nivelment cu 100 staţii. Eroarea medie pătratică a acestei unităţi de pondere este

$$\mu_{100}=\pm\sqrt{\frac{403}{8}}=\pm 7{,}1 \text{ mm}.$$

Rezultă eroarea medie pătratică într-o singură staţie

$$\mu=\pm\frac{\mu_{100}}{\sqrt{100}}=\pm 0{,}7 \text{ mm}.$$

ceea ce, pentru lungimea totală considerată de 1 km, întrucît am executat $2\times 5=10$ drumuiri dus şi întors, ne dă

$$\mu_{km}=\mu\sqrt{10}=2{,}2 \text{ mm}.$$

Capitolul II

Exemple de aplicaţie a teoriei erorilor în practică

§ 44. Precizie de măsurare şi precizie de citire

Precizia de măsurare, sau precizia aparatului, ne spune cît de precis coincid valorile obţinute cu aparatul — probă cu valorile aparatului de măsurat — etalon. Această coincidenţă nu se referă numai la exactitatea, ci şi la reproductibilitatea valorilor obţinute.

„Precizia citirii“ ne spune numai cît de comod pot fi citite indicaţiile aparatului *şi nu are nici o legătură cu exactitatea măsurătorii;* mărirea preciziei de citire nu măreşte precizia de măsurare, căci a citi nu înseamnă a măsura. Este bine şi necesar să precizăm acest lucru, deoarece există tentaţia de a se crede că un ochi mai exercitat, care este capabil să distingă jumătatea de interval, dublează precizia aparatului, ceea ce este cu desăvîrşire fals. Constructiv, aparatele de măsurat sînt astfel dispuse, încît *cea mai mică*

Scanned with OKEN Scanner

citire directă — cea mai mică diviziune a scării gradate — constituie măsura preciziei aparatului de măsurat.

Indicații diferite în această privință pot duce la confuzii și la concluzii greșite.

Cum orice evaluare a unui interval al scării gradate se execută prin două citiri (la extremitățile intervalului), pentru comoditatea acestei operații scările gradate sînt afectate de un reper care fixează *punctul zero*, renunțîndu-se astfel la efectuarea operației de determinare a valorii medii.

De exemplu, efectuăm 10 citiri; eroarea medie pătratică a mediei aritmetice a acestor citiri cu aceeași eroare medie pătratică individuală m este $\frac{m}{\sqrt{10}} = M$.

Imprecizia determinării punctului zero este evident tot $\pm m$, prin ipoteză. Așadar, imprecizia totală (după regula propagării erorilor) este

$$\mathcal{I} = \pm\sqrt{m^2 + M^2} = \pm\sqrt{\frac{11}{10}}\, m \approx m .$$

Prin urmare, determinarea impreciziei aparatului nu necesită repetarea citirilor, ci numai cunoașterea impreciziei cu care este fixat punctul zero.

Imprecizia aparatelor de măsurat privește atît exactitatea cît și reproductibilitatea valorilor obținute prin măsurare.

Exactitatea valorilor măsurate depinde de calitatea construcției aparatului și poate fi verificată prin verificarea pieselor constitutive ale aparatului. Exactitatea unui aparat de măsurat nu poate fi mai mare decît exactitatea aparatului de măsurat-etalon.

Reproductibilitatea măsurătorilor depinde atît de calitatea cît și de îndemînarea observatorului, dar nu caracterizează însăși imprecizia aparatului.

În cazul unui singur aparat, imprecizia este dată de imprecizia valorilor obținute cu acest aparat.

În cazul aparatelor construite în serie, imprecizia este dată de cea mai mare imprecizie a celui mai puțin precis aparat din serie.

Exemplu. Să considerăm un aparat de măsurat lungimile, comparatorul Abbé, cu suport vertical, fără erori sistematice de funcționare. Imprecizia valorilor care se obțin cu un astfel de aparat depinde de erorile de divizare a scării gradate și de citirea microscopului.

Scara gradată este verificată de constructor și eroarea este indicată pe certificatul care este atașat aparatului, și anume pentru fiecare interval măsurat de la reperul zero, în zecimi de μ. Imprecizia acestei tabele este $i_1 = \pm 1\,\mu$ pentru fiecare valoare ($i_1 = 3m_1$). În cazul în care nu se face uz de tabelă, imprecizia determinării unei lungimi l este dată prin gradația constructorului, egală cu $i_1' = \pm\left(1{,}5 + \frac{1}{100}\, l\right)\mu$.

Scanned with OKEN Scanner

Imprecizia citirii la microscop este $i_2 = \pm 0{,}3\,\mu$ ($i_2 = 3m_2$).
Deosebim două cazuri
1. Tabela de erori lipseşte. Avem

Prima citire:	65,247 mm
A doua citire:	85,432 mm
Valoarea măsurată:	20,185 mm

Imprecizia valorii măsurate

$$i'_1 = \pm\left(1{,}5 + \frac{20}{100}\right)\mu = \pm 1{,}7\,\mu.$$

Imprecizia citirii (de fiecare)

$$i_2 = \pm 0{,}3\,\mu.$$

Imprecizia totală

$$\mathcal{I} = \sqrt{i'^2_1 + 2\,i^2_2} = \sqrt{1{,}7^2 + 2\times 0{,}3^2}\,\mu = \pm 1{,}75\,\mu.$$

Rezultatul măsurătorii:

$$l = 20{,}185\ \text{mm} \pm 1{,}8\,\mu.$$

2. Ţinem seamă de indicaţiile tabelei de erori:
Eroarea scării gradate la 65 (prima citire) este $+0{,}5\ \mu$
Eroarea scării gradate la 85 (a doua citire) este $-0{,}3\,\mu$.
Citirea corectă.

Prima citire:	$65{,}247 + 0{,}5\,\mu = 65{,}2475$
A doua citire:	$85{,}432 - 0{,}3\,\mu = 85{,}4317$
Valoarea corectată:	20,1842

Imprecizia corecţiei (de fiecare): $i'_1 = \pm 1\,\mu$
Imprecizia citirii (de fiecare): $i_2 = \pm 0{,}3\,\mu$

Imprecizia totală:

$$\mathcal{I} = \sqrt{2\,i'^2_1 + 2\,i^2_2} = \sqrt{2\times 1^2 + 2\times 0{,}3^2}\,\mu = \pm 1{,}48\,\mu.$$

Rezultatul măsurătorii:

$$l = 20{,}184\ \text{mm} \pm 1{,}5\,\mu.$$

Rezultatele obţinute prin cele două moduri de calcul diferă între ele cu $0{,}8\,\mu$, iar impreciziile lor cu $0{,}3\,\mu$. Rezultatul găsit folosind tabela este mai corect, iar imprecizia mai mică.

Dacă am avea o producţie în serie de comparatori Abbé, luînd în considerare faptul că nu sînt alte influenţe perturbătoare şi producătoare de erori — în afară de cele condiţionate de însuşi procesul de măsurare — valorile impreciziilor stabilite pentru un anumit aparat sînt valabile şi pentru o producţie în serie. În general, constructorul se asigură cu un coeficient de garanţie, dînd garanţie pentru o imprecizie mai mare, nu mai mică, decît cea care ar putea reieşi prin mărirea preciziei unora dintre aparatele seriei.

Scanned with OKEN Scanner

§ 45. Aplicarea teoriei erorilor la măsurătorile cu teodolitul

Se cere să determinăm eroarea medie pătratică a rezultatului măsurării unui unghi cu teodolitul. Admitem că măsurătoarea unghiului se face prin metoda şirului, şi anume: după primul şir de măsurători luneta este dată peste cap şi limbul se deplasează cu o mărime oarecare, al doilea şir de măsurători efectuîndu-se în aceste condiţii.

Precizia măsurătorii unui unghi depinde de multe condiţii, dintre care cele mai importante sînt: punerea în staţie a instrumentului şi a semnalului, exactitatea vizării şi corectitudinea citirilor pe verniere.

Practica ne arată că inexactitatea centrării instrumentului cu 1 cm produce o eroare de aproximativ 11″ într-una din direcţiile (laturile) unghiului, pentru o lungime mai mică de 400 m a laturii respective.

Eroarea de aşezare a semnalului, în aceleaşi condiţii, este de aproximativ 9″ pentru fiecare direcţie.

Eroarea de vizare se ia obişnuit $60''/v$, unde am însemnat prin v puterea de mărire a lunetei. Pentru lunetele cu mărire 10, rezultă o eroare de vizare de 6″.

Eroarea de citire pe vernier este egală cu jumătate din precizia proprie a vernierului; la vernierul de 1′, eroarea de citire pe un vernier este deci de 30″, iar media aritmetică a citirilor pe două verniere va fi afectată de o eroare de $\sqrt{2}$ ori mai mică, adică aproximativ $\frac{30''}{\sqrt{2}} = 22''$.

Dacă notăm cu t eroarea medie pătratică a unei direcţii (laturi) a unghiului măsurat, eroarea medie pătratică a unghiului format de aceste două direcţii este $m = t\sqrt{2}$.

Dacă considerăm unghiul măsurat prin două şiruri complete de măsurători, eroarea medie pătratică va fi

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = \frac{t \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = t .$$

Ţinînd seamă numai de aceste erori, pe care le-am considerat ca fiind cele mai importante (eroarea de centrare a instrumentului $m_1 = \pm 11''$, eroarea de centrare a semnalului $m_2 = \pm 9''$, eroarea de vizare $m_3 = \pm 6''$ şi eroarea de citire $m_4 = \pm 22''$), găsim în definitiv

$$t = \pm\sqrt{11^2 + 9^2 + 6^2 + 22^2} \approx \pm 27'' \approx \pm 0{,}5' .$$

În § 19 ni se indică să considerăm ca eroare limită triplul erorii medii pătratice

$$\Delta_{lim} = \pm 3 \times 0{,}5' = \pm 1{,}5'.$$

Dacă luăm această valoare ca eroare limită a măsurătorii unui unghi cu teodolitul, atunci neînchiderea limită a sumei a n unghiuri ale unui poligon închis este $\Delta_{lim} = \pm 1{,}5\sqrt{n}$.

§ 46. Eroarea medie pătratică de măsurare a unei distanțe

Fie l lungimea unei prăjini cu care avem de măsurat o distanță anumită. Să admitem că prăjina s-a cuprins de n ori în această distanță, care are o lungime măsurată egală cu $d = nl$. Fie $\pm m$ eroarea medie pătratică ce revine unei singure așezări a dispozitivului de măsurare, adică a unei măsurători individuale. Eroarea medie pătratică ce revine măsurătorii întregii lungimi d este deci, conform formulei (50) de la § 20:

$$m'_d = \pm m\sqrt{n}.$$

Înlocuind valoarea lui n din expresia lungimii măsurate, obținem

$$m'_d = \pm \frac{m}{\sqrt{l}}\sqrt{d}. \qquad (1)$$

Fie

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{l}} \qquad (2)$$

o mărime pe care o putem considera constantă pentru dispozitivul folosit pentru măsurare, în condițiile date. Atunci

$$m'_d = \pm \mu\sqrt{d}, \qquad (3)$$

adică erorile întîmplătoare ale măsurătorii unei distanțe influențează eroarea medie pătratică respectivă *proporțional cu rădăcina pătrată a lungimii de măsurat d*. Pentru

$$d = 1, \text{ avem } m'_d = \mu,$$

prin urmare μ poate fi privit drept eroarea medie pătratică a măsurătorii care corespunde unității de lungime.

Coeficientul μ, astfel definit [formula (2)], se ia drept *criteriu de apreciere a preciziei măsurătorilor liniare*. El depinde de natura instrumentului de măsurare, de felul terenului și de metodele folosite în operația de măsurare.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă există şi erori sistematice, care nu pot fi eliminate în prealabil, este indicat să considerăm aceste erori ca fiind direct proporţionale cu însăşi lungimea măsurată.

$$m_d'' = \lambda d , \tag{4}$$

unde λ este coeficientul erorilor sistematice, care corespunde unităţii lungimii măsurate, analog coeficientului μ al erorilor întîmplătoare.

Influenţa comună a erorilor întîmplătoare şi sistematice, după § 41, este pusă în evidenţă prin relaţia care dă eroarea medie pătratică totală

$$m_d^2 = \mu^2 d + \lambda^2 d^2 ,$$

de unde rezultă

$$\left(\frac{m_d}{d}\right)^2 = \frac{\mu^2}{d} + \lambda^2 . \tag{5}$$

Eroarea relativă $\frac{m_d}{d}$ caracterizează *precizia*, prin determinarea erorii tolerate de măsurare a distanţei considerate de lungime d; $\frac{\mu}{\sqrt{d}}$ reprezintă influenţa erorilor întîmplătoare asupra acestei precizii, variabilă cu lungimea d; λ reprezintă influenţa erorilor sistematice, aceeaşi pentru toate lungimile d.

Precizia măsurătorii nu este constantă pentru un aparat dat, ci variază cu condiţiile de efectuare a măsurătorii.

De exemplu, natura terenului va influenţa o măsurătoare a unei distanţe cu panglica de 20 m, şi anume, vom avea o categorie de rezultate pe un teren drept neaccidentat, favorabil operaţiei de măsurat; o altă categorie, inferioară primei, într-un teren care prezintă condiţii nefavorabile de măsurătoare şi chiar o a treia categorie, inferioară precedentelor, într-un teren plin de mocirle, tufişuri, nisipos etc.

De aceea, în practică, rezultatul unei astfel de măsurători trebuie să fie însoţit de o indicaţie asupra felului terenului în care s-a efectuat, asupra lungimii măsurate şi metodei folosite.

Instrucţiunile după care trebuie să se orienteze operatorii prevăd că precizia de măsurare a distanţelor cu panglica de oţel nu trebuie să fie mai mică decît 1/2 000 în condiţii bune de măsurare, dar nici mai mică decît 1/1 000 în condiţii neprielnice de măsurare.

Dacă lungimile măsurate sînt laturile unui contur poligonal şi dacă eroarea medie pătratică a măsurătorii unghiurilor este, de exemplu, $\pm 0',5$, atunci este uşor de stabilit care trebuie să fie eroarea tolerată de măsurare a laturilor. Presupunem, pentru a

Scanned with OKEN Scanner

fixa ideile, că eroarea 0′,5 corespunde înclinării transversale a semnalului cu mărimea q.

Cum această mărime q trebuie considerată ca fiind foarte mică, ea poate fi privită ca egală cu arcul de cerc într-un cerc de rază d şi, pînă la mărimi de ordin foarte mic, chiar egală cu unghiul care subîntinde acest arc, măsurat în radiani. Ştiind că un radian are $350 \times 60 : 2\pi = 3\,438'$, numărul de radiani corespunzători unghiului de 0′.5 este deci de $\frac{0{,}5}{3\,438} = \frac{1}{6\,876} \approx \frac{1}{7\,000}$, valoare care exprimă limita inferioară a erorii tolerate cu care trebuie măsurată lungimea considerată.

§ 47. Mărimea medie a deplasării extremităţii unei distanţe măsurate, datorită erorilor de măsurare a lungimii şi a direcţiei

Fie d lungimea distanţei considerate, α unghiul care determină orientarea dreptei pe care este luată distanţa şi fie m_d şi m_α erorile medii pătratice respective. Sub influenţa erorilor de măsurare a lungimii, extremitatea dreptei va fi deplasată de-a lungul ei, cu o mărime definită de eroarea medie pătratică m_d; iar sub influenţa erorii de măsurat a direcţiei, extremitatea dreptei poate fi considerată ca suferind o deviaţie pe cercul de rază d, sub un unghi egal cu $m'_\alpha \cdot \sin 1'$, unde am notat cu m'_α valoarea lui m_α exprimată în minute de arc.

Deplasarea totală a extremităţii distanţei, sub influenţa celor două erori — independente una de alta — este dată de relaţia

$$m^2 = m_d^2 + d^2 m_\alpha'^2 \cdot \sin^2 1'.$$

Avînd în vedere relaţia (3), deducem

$$m^2 = \mu^2 d + d^2 m_\alpha'^2 \cdot \sin^2 1',$$

sau

$$\left(\frac{m}{d}\right)^2 = \frac{\mu^2}{d} + m_\alpha'^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad (6)$$

Eroarea relativă $\frac{m}{d}$ caracterizează precizia de determinare a poziţiei extremităţii distanţei măsurate, compusă din influenţa erorii liniare $\frac{\mu}{\sqrt{d}}$ şi a erorii unghiulare $m'_\alpha \cdot \sin 1'$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 48. Aplicarea teoriei erorilor în nivelmentul geometric. Distanța normală de la nivelă la mira

Drept eroare de vizare inevitabilă, dedusă din practica măsurătorilor, se ia obișnuit (v. § 44) $m_1=\frac{60''}{v}$, unde v este puterea de mărire a lunetei.

Eroarea datorită așezării neprecise a bulei de aer între repere se poate lua egală cu $m_2=\frac{\tau''}{10}$ (τ fiind sensibilitatea nivelei, adică unghiul la centru pentru o diviziune a nivelei). Eroarea totală a celor două erori suprapuse, dar independente, este (în secunde)

$$m''=\sqrt{m_1^2+m_2^2}=\sqrt{\left(\frac{60''}{v}\right)^2+\left(\frac{\tau''}{10}\right)^2}. \qquad (7)$$

Dacă punem condiția ca *eroarea de citire să nu fie mai mare decît o valoare dată* t, distanța D de la nivelă la mira pentru care această condiție este satisfăcută va fi exprimată prin relația

$$t=D\,\frac{m''}{206\,280}, \qquad (8)$$

unde $206\,280''=3\,438\times 60''$; deci, distanța normală este

$$D=\frac{206\,280''}{m''}\,t=\frac{206\,280''\,t}{\sqrt{\left(\frac{60''}{v}\right)^2+\left(\frac{\tau''}{10}\right)^2}}. \qquad (9)$$

§ 49. Eroarea medie pătratică a unei diferențe de nivel

Fie h valoarea medie a diferențelor de nivel măsurate și fie $\pm t$ eroarea medie pătratică de citire pe miră; atunci eroarea medie pătratică a diferenței de nivel este $m_h=\pm t\sqrt{2}$. Pentru o drumuire de nivelment de lungime $d=2nD$, unde am însemnat cu D distanța normală de la nivelă la miră și cu n numărul stațiilor, eroarea medie pătratică a sumei celor n operații de nivelment este

$$m_s=\pm t\sqrt{2n},\ \text{deci}\ m_s=\pm t\sqrt{\frac{d}{D}};$$

sau, punînd $k=\frac{t}{\sqrt{D}}$, rezultă

$$m_s=\pm k\sqrt{d}.$$

Mărimea k este o constantă pentru o stație, căci se exprimă prin cîtimi ce se raportează la o anumită stație, admițînd că această

cîtime este *aceeași* pentru toate stațiile. Rezultă că eroarea medie pătratică a unei drumuiri de lungime d este proporțională cu rădăcina pătrată din lungimea întregii drumuiri.

Pentru $d=1$ rezultă $m_s=k$, deci k se poate considera ca eroarea medie pătratică a nivelmentului pentru unitatea de lungime a drumuirii.

Exemplu numeric. Fie pe 1 km distanță, $n=10$ stații. Luînd $t=1$, rezultă eroarea medie pătratică pe kilometru

$$k=\pm\sqrt{20}=\pm 4{,}5 \text{ mm}\approx\pm 0{,}005 \text{ m}.$$

În aceste condiții, eroarea medie pătratică a nivelmentului întregii drumuiri de lungime d km este $m_s=\pm 0{,}005\sqrt{d}$.

§ 50. Aplicarea teoriei erorilor în ridicările cu planșeta, folosind fire stadimetrice

Dacă t este eroarea medie pătratică de citire la un fir, eroarea medie pătratică a diferențelor de citire la două fire este atunci

$$m_l=\pm t\sqrt{2},$$

considerînd coeficientul stadimetric de 100 fără eroare.

Pentru o distanță $d=100\,l$ eroarea medie pătratică este

$$m_d=100\,m_l=\pm 100\,t\sqrt{2}. \qquad (10)$$

Eroarea medie pătratică t, care figurează în această formulă, depinde de unghiul limită de vizare prin lunetă $\frac{1'}{v\cdot 3\,438}$, unde v este puterea de mărire a lunetei; de asemenea, t depinde și de distanța d pînă la mină, în virtutea relației

$$3\,t=d\frac{1'}{v\cdot 3\,438}. \qquad (11)$$

Rezultă

$$m_d=\pm\, d\frac{100\cdot\sqrt{2}}{3v\cdot 3438}=\pm d\frac{1}{74v};$$

așadar, eroarea relativă a stadimetriei cu fire (și deci precizia) este dată de relația

$$\frac{m_d}{d}=\frac{1}{74v}. \qquad (12)$$

Scanned with OKEN Scanner

De exemplu, pentru $v=20$, rezultă $\frac{m_d}{d}=\frac{1}{1\,480}$; pentru $v=25$, rezultă $\frac{m}{d}=\frac{1}{1\,850}$ etc.

În practică, această eroare este mai mică pentru stadimetria cu fire, ajungînd cîteodată pînă la 0,5%.

§ 51. Erorile medii pătratice ale diferențelor de nivel date prin formula nivelmentului trigonometric

$$h=d\cdot \operatorname{tg}\alpha . \tag{13}$$

Prin diferențiere logaritmică a relației precedente, spre a fi adusă la forma liniară ($Z=X_1+X_2$), se obține

$$\frac{\Delta h}{h}=\frac{\Delta d}{d}+\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\cos^2\alpha}, \tag{14}$$

unde putem considera pe α exprimat în măsură de arc (radiani).

Însemnînd cu m_h, m_d și m_α eroarea medie pătratică totală, respectiv pentru distanțe și pentru unghi, din (14) și (13) putem scrie

$$m_h^2=\operatorname{tg}^2\alpha\cdot m_d^2+\frac{d^2 m_\alpha^2}{\cos^4\alpha}\cdot \tag{15}$$

Putem deduce din (15) erorile medii pătratice relative, împărțind cu h^2 în ambii membri și ținînd seamă de (13)

$$\left(\frac{m_h}{h}\right)^2=\left(\frac{m_d}{d}\right)^2+\left(\frac{2\,m'_\alpha\cdot\sin 1'}{\sin 2\alpha}\right)^2, \tag{16}$$

unde am pus $m_\alpha=m'_\alpha\cdot\sin 1'$ (exprimat în radiani) și am observat că

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}=\frac{2}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{\sin 2\alpha}\cdot$$

În practică, se aplică formula (15) dacă α este un unghi de valoare suficient de mare.

Exemplu. Fie $d=124{,}18$ m $\pm 0{,}03$ m; $\alpha=19^\circ 41'30'' \pm 40''$. Avem:

$$m_d=0{,}03;\quad m_\alpha=40''=\frac{40}{3\,438\times 60};\quad \operatorname{tg}\alpha=0{,}36;\quad \cos^2\alpha=0{,}942.$$

Înlocuind aceste valori în formula (15) se obține

$$m_h=\pm 0{,}027\approx\pm 0{,}03\text{ m}.$$

Scanned with OKEN Scanner

În cazul unui unghi α suficient de mic (practic $\alpha < 10°$) putem utiliza formula (16), unde înlocuim $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$ şi punem

$$\frac{2m'_\alpha \cdot \sin 1'}{\sin 2\alpha} = \frac{m_\alpha}{\alpha}.$$

În aceste condiţii, formula (16) se poate scrie mai scurt

$$\left(\frac{m_h}{h}\right)^2 = \left(\frac{m_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{m_\alpha}{\alpha}\right)^2, \qquad (17)$$

unde $\frac{m_d}{d}$ reprezintă influenţa erorilor de măsurare a distanţelor, iar $\frac{m_\alpha}{\alpha}$ reprezintă influenţa erorilor de măsurare a unghiului, asupra preciziei de determinare a diferenţei de nivel, după formula (13).

În practică, termenul $\frac{m_d}{d}$ este neglijabil faţă de $\frac{m_\alpha}{\alpha}$ din formula (17), după cum se verifică uşor şi în exemplul numeric precedent. Putem pune deci

$$m_h = h\frac{m_\alpha}{\alpha} = d \cdot \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{m_\alpha}{\alpha} = d \cdot \frac{m'_\alpha}{3438'}, \qquad (18)$$

deoarece $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1$. Pentru $d = 100$ m, $m'_\alpha = 1'$, rezultă $m_h = 0{,}03$ m; adică eroarea medie pătratică a diferenţei de nivel la 100 m distanţă este egală cu 3 cm. Este evident că eroarea medie pătratică a diferenţei de nivel m_h creşte proporţional cu distanţa d. La $d = 1$ km $= 1\,000$ m vom avea o eroare de 30 cm. De aceea, în practică se obişnuieşte să se împartă distanţa de măsurat în porţiuni mai mici; de exemplu, vom împărţi 1 km în 10 părţi de cîte 100 m; în felul acesta ameliorăm rezultatele măsurătorii. În adevăr, fiecare măsurătoare fiind afectată de o eroare de cîte 3 cm, rezultatul celor 10 măsurători va fi afectat de o eroare totală de numai $\pm 3\sqrt{10} \approx 10$ cm, în loc de 30 cm, ceea ce reprezintă o mărire a preciziei de măsurătoare. Este evident că acest cîştig în precizie are drept consecinţă o pierdere de timp în lucru, aşa încît alegerea metodei celei mai convenabile de aplicat în practică va depinde de acela dintre cei doi factori (precizie sau timp) care este precumpănitor în lucrarea pe care o avem de executat.

După cum am văzut şi în exemplul numeric de mai sus, în practică influenţa hotărîtoare asupra preciziei unei determinări de nivelment prin formula (13) o are precizia în măsurarea unghiului α. În special, cînd acest unghi este foarte mic, este mai bine să se înlocuiască nivelmentul tachimetric (v. § 50) prin nivelmentul trigonometric.

Scanned with OKEN Scanner

§ 52. Eroarea medie pătratică în determinarea diferențelor de nivel la o drumuire

Fie o drumuire cu n diferențe de nivel $h_1, h_2, \ldots, h_n$ și n laturi $d_1=d_2=\ldots=d_n$, presupuse de lungimi egale între ele. Să notăm

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\operatorname{tg}^2\alpha_i=\operatorname{tg}^2\varepsilon;\quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}d_i^2=d_0^2, \tag{19}$$

unde am notat cu α_i unghiurile corespunzătoare după formula (13). Fie m_s eroarea medie pătratică a drumuirii totale; avem evident

$$m_s^2=\sum_{i=1}^{n}m_{h_i}^2. \tag{20}$$

Observăm că, după (19), valorile ε și d_0 corespund valorilor medii pătratice ale unei drumuiri individuale (parțiale), astfel încît, după formula (15), vom putea scrie

$$m_{h_i}^2=\operatorname{tg}^2\alpha_i\cdot m_d^2+d_i^2m_a^2, \tag{21}$$

admițînd că eroarea medie pătratică pentru distanțe este aceeași, m_d, și pentru unghiuri este de asemenea aceeași m_a, în fiecare drumuire parțială. Sumînd expresia (21) în raport cu $i=1, 2, \ldots, n$, avînd în vedere relațiile (19) și (20), obținem

$$m_s^2=m\cdot\operatorname{tg}^2\varepsilon\cdot m_d^2+n\cdot d_0^2m_a^2, \tag{22}$$

sau, pentru eroarea medie pătratică relativă, punînd $s=nd_0$ (deoarece laturile d_i sînt presupuse egale între ele), avem

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{m_d}{m_0}\right)^2\operatorname{tg}^2\varepsilon+m_a^2\right\}. \tag{23}$$

De exemplu, în practică, luîndu-se pentru mină

$$\frac{m_d}{d}=\frac{1}{300};\quad m_a''=0'',5;\quad m_a=\frac{0.5}{3\,438}\approx\frac{1}{6\,900},$$

se obține pentru eroarea medie pătratică totală relativă

$$\left(\frac{m_s}{s}\right)^2=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{300}\right)^2\operatorname{tg}^2\varepsilon+\left(\frac{1}{6\,900}\right)^2\right\}, \tag{24}$$

formulă cu care se poate lucra practic într-o drumuire.

Scanned with OKEN Scanner

§ 53. Introducerea noțiunii de „compensare"

Să se determine formulele de compensare ale unghiurilor dintr-un triunghi plan.

Să considerăm un triunghi plan oarecare, ale cărui unghiuri măsurate au dat ca rezultat valorile α, β, γ. Din cauza erorilor inevitabile de măsurare vom observa o nepotrivire între suma $\alpha+\beta+\gamma$ și valoarea teoretică 180°, și anume vom avea

$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=\varepsilon,$$

unde ε este eroarea reală totală (asupra sumei unghiurilor).

Să repartizăm această eroare asupra celor trei unghiuri.

Cazul 1. Presupunem că cele trei unghiuri sînt măsurate cu aceeași precizie.

Vom considera, pentru moment, unul dintre unghiuri, de exemplu α, ca fiind singurul necunoscut (β și γ cunoscute). Este clar că acest unghi poate fi determinat prin două măsurători și anume: o primă măsurătoare cu rezultatul $x_1=\alpha$, cu ponderea $p_1=1$; o a doua măsurătoare cu rezultatul $x_2=180^\circ-(\beta+\gamma)$, cu ponderea $p_2=\frac{1}{2}$, a cărei valoare am dedus-o observînd că în rezultatul x_2 intră erorile măsurătorilor ambelor unghiuri β și γ. În adevăr, eroarea medie pătratică a lui x_1 este $m_1=m$, însemnînd prin m eroarea medie pătratică individuală. Pentru x_2, eroarea medie pătratică este dată de relația $m_2^2=m^2+m^2$, deci $m_2=m\sqrt{2}$. Prin urmare, $\frac{m_1}{m_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dar, după teorema de la § 31, care ne spune că raportul ponderilor este egal cu raportul invers al pătratelor erorilor medii pătratice corespunzătoare, avem:

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{m_2^2}{m_1^2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right)^2;\ \text{deci}\ p_2=\frac{p_1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Să formăm valoarea medie pătratică a rezultatelor x_1 și x_2 cu ponderile respective $p_1=1$, $p_2=\frac{1}{2}$; obținem

$$x=\frac{p_1x_1+p_2x_2}{p_1+p_2}=\frac{1\cdot\alpha+\frac{1}{2}\{180-(\beta+\gamma)\}}{1+\frac{1}{2}}=\alpha-\frac{\varepsilon}{3}.$$

Repetînd întocmai aceleași considerații și pentru celelalte două unghiuri și însemnînd cu y și z valorile medii ponderate ale rezul-

tatelor măsurătorilor unghiurilor β și γ, obținem, în definitiv

$$x=\alpha-\frac{\varepsilon}{3};\quad y=\beta-\frac{\varepsilon}{3};\quad z=\gamma-\frac{\varepsilon}{3}; \tag{25}$$

așadar,

$$x+y+z=\alpha+\beta+\gamma-\varepsilon=180^\circ, \tag{26}$$

ceea ce exprimă legea de repartizare a erorilor ε asupra celor trei unghiuri, în mod uniform, cum era de așteptat prin simple considerații empirice. După (26), putem scrie, pentru mărimea x, eroarea aparentă

$$v_1=\alpha-x=+\frac{\varepsilon}{3};$$

$$v_2=180-(\beta+\gamma)-x=180-(\beta+\gamma)-\{180-(y+z)\}=-\frac{2}{3}\varepsilon.$$

După formula (132), § 36, eroarea medie pătratică a unității de pondere este

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{p_1v_1^2+p_2v_2^2}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{1\cdot\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2+\frac{1}{2}\left(2\frac{\varepsilon}{3}\right)^2}{2-1}}=\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}. \tag{27}$$

Observăm că am luat pentru unghiul α ponderea 1, înainte de compensare (la fel și pentru unghiurile β și γ). Prin urmare, valoarea (27) a lui μ este eroarea medie pătratică înainte de compensare. După compensare, am obținut valoarea mai bună x (respectiv y și z) căreia i se atribuie o pondere mai mare, anume $p_1+p_2=\frac{3}{2}$, care constituie ponderea mediei aritmetice ponderate (§ 33)

$$\mathcal{M}=\frac{\mu}{\sqrt{[p]}}=\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}=\pm\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{3}, \tag{28}$$

eroare medie pătratică ce revine pentru fiecare unghi (pentru valorile medii ponderate x, y, z).

Este evident că eroarea finală ε este rezultatul influenței celor trei erori μ egale între ele, asupra celor trei unghiuri, deci

$$\mu^2+\mu^2+\mu^2=\varepsilon^2;\quad \text{deci}\quad \mu=\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},$$

în concordanță cu (27).

Pe de altă parte, observăm că valoarea medie pătratică μ *dinainte* de compensare și eroarea medie pătratică *după* compensare $\mathcal{M}$, stau în raportul [după (28)]

$$\frac{\mathcal{M}}{\mu}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}816. \tag{29}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci, prin compensare, eroarea medie pătratică s-a micşorat în raportul 0,8 : 1 şi, prin urmare, precizia s-a mărit în raportul 1 : 0,8. Aşadar, prin compensarea celor trei unghiuri dintr-un triunghi s-a obţinut o creştere a preciziei de 20% pentru fiecare unghi.

Cazul 2. În cele precedente am considerat rezultatele măsurătorilor α, β, γ ca avînd aceleaşi ponderi. Vom presupune, pentru generalizare, că aceste rezultate au ponderi diferite

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

cu ponderile

$$p_\alpha,\ p_\beta,\ p_\gamma,$$

astfel încît

$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=\varepsilon.$$

Dacă μ este eroarea unităţii de pondere, erorile medii pătratice ale unghiurilor *înainte* de compensare vor fi (§ 36)

$$m_\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{p_\alpha}},\ m_\beta=\frac{\mu}{\sqrt{p_\beta}},\ m_\gamma=\frac{\mu}{\sqrt{p_\gamma}};\qquad(30)$$

prin urmare,

$$m_\alpha^2=\mu^2\left(\frac{1}{p_\alpha}\right);\ m_\beta^2+m_\gamma^2=\mu^2\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right).\qquad(31)$$

Să însemnăm prin p_1 ponderea unghiului măsurat α şi prin p_2 ponderea sumei celorlalte două unghiuri $\beta+\gamma$; atunci [§ 31, formula (118)], putem scrie

$$p_1=p_\alpha=\frac{1}{\frac{1}{p_\alpha}};\ p_2=\frac{1}{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}};\ p_1+p_2=\frac{\left[\frac{1}{p}\right]}{\frac{1}{p_\alpha}\left(\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}\right)}.\qquad(32)$$

Cu aceste precizări, valoarea medie ponderată a determinării unghiului x este dată de relaţia

$$x=\frac{p_1\alpha+p_2\{180-(\beta+\gamma)\}}{p_1+p_2}=\frac{p_1\alpha+p_2(\alpha-\varepsilon)}{p_1+p_2}=\alpha-\frac{p_2}{p_1+p_2}\varepsilon;$$

sau, după relaţiile (32)

$$x=\alpha-\frac{\frac{1}{p_\alpha}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\varepsilon\qquad(33)$$

Scanned with OKEN Scanner

și la fel pentru celelalte unghiuri

$$y=\beta-\frac{\frac{1}{p_\beta}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\varepsilon\,;\quad z=\gamma-\frac{\frac{1}{p_\gamma}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\varepsilon\,. \tag{34}$$

Prin urmare, eroarea ε se repartizează asupra celor trei unghiuri invers proporțional cu ponderile, sau proporțional cu pătratele erorilor medii pătratice.

Din (31) rezultă prin adunare

$$\mu=\frac{\varepsilon}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}, \tag{35}$$

astfel încît, după (30)

$$m_\alpha=\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}};\quad m_\beta=\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\beta}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}};\quad m_\gamma=\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}}}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}\,. \tag{36}$$

Pentru eroarea medie pătratică a valorilor medii ponderate rezultă

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{M}_\alpha&=\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}}\sqrt{\frac{1}{p_\beta}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]};\quad \mathcal{M}_\beta=\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\beta}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\gamma}}}{\left[\frac{1}{p}\right]};\\ \mathcal{M}_\gamma&=\varepsilon\frac{\sqrt{\frac{1}{p_\gamma}}\sqrt{\frac{1}{p_\alpha}+\frac{1}{p_\beta}}}{\left[\frac{1}{p}\right]}\,.\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Fig. 5.

Exemplu numeric (fig. 5). Prin măsurători executate asupra unui triunghi s-au găsit următoarele valori pentru care s-au adoptat ponderile alăturate prin considerații asupra calităților operațiilor de măsurare pe teren

$$\begin{aligned}\alpha&=72^\circ16'44{,}86'' && \text{cu ponderea } p_\alpha=27\\ \beta&=90^\circ01'56{,}46'' && \text{cu ponderea } p_\beta=42\\ \gamma&=17^\circ41'17{,}43'' && \text{cu ponderea } p_\gamma=65\end{aligned}$$

$$\alpha+\beta+\gamma=179^\circ59'58{,}75''.\qquad \varepsilon=\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=1{,}25''.$$

Scanned with OKEN Scanner

Inversele ponderilor

$$\frac{1}{p_\alpha}=0{,}037,\quad \frac{1}{p_\beta}=0{,}024,\quad \frac{1}{p_\gamma}=0{,}015,\quad \frac{1}{\left[\frac{1}{p}\right]}=0{,}076.$$

Compensările unghiurilor [după relațiile (33) și (34)]

$$v_\alpha=\alpha-x=\frac{0{,}037}{0{,}076}\cdot 1{,}25=+0{,}61\,;\quad v_\beta=\frac{0{,}024}{0{,}076}\cdot 1{,}25=0{,}40\,;$$

$$v_\gamma=\frac{0{,}015}{0{,}076}\cdot 1{,}25=0{,}24.$$

Tabela de rezultate

Valori măsurate	Compensări	Valori compensate
$\alpha=72°\,16'44{,}86''$ $\beta=90\quad 1\,56{,}46$ $\gamma=17\;\;41\;17{,}43$	$+0{,}61''$ $+0{,}40$ $+0{,}24$	$72°\,16'45{,}47''$ $90\quad 1\,56{,}86$ $17\;\;41\;17{,}64$
$179°\,59'58{,}75''$	$+1{,}25''$	$180°\,0'\,0{,}00''$

După formula (35) eroarea unității de pondere este

$$\mu=\pm\frac{\varepsilon}{\sqrt{\left[\frac{1}{p}\right]}}=\pm 1{,}25\sqrt{0{,}076}=\pm 3{,}44\,,$$

iar pentru erorile medii pătratice ale determinărilor individuale se obține, după (30)

$$m_\alpha=\frac{\mu}{\sqrt{p_\alpha}}=\pm\frac{3{,}44}{5}=\pm 0{,}69\,;\quad m_\beta=\pm 0{,}53\,;\quad m_\gamma=\pm 0{,}43\,;$$

astfel încît rezultatul măsurătorii se poate exprima prin

$$\begin{aligned}\alpha&=72°\;\;16'\;\;45{,}47''\pm 0{,}69'',\\ \beta&=90°\;\;01'\;\;56{,}86''\pm 0{,}53'',\\ \gamma&=17°\;\;41'\;\;17{,}67''\pm 0{,}43''.\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

II. NOȚIUNI DE TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Capitolul I

Proprietăți elementare

§ 54. Noțiunea de probabilitate

Este neîndoielnic că toate fenomenele naturii își au cauze bine determinate. Problema care se pune omului de știință este să pătrundă în profunzimea acestor procese, să examineze cauzele și legăturile existente și să descopere legile științifice, obiective, care reglează evoluția fenomenelor din natură.

Dar nu totdeauna omul stăpînește legile naturii în așa măsură încît să poată analiza tot complexul de fenomene ale naturii și să poată prevedea condițiile și caracteristicile realizării sau nerealizării unui *anumit* eveniment care aparține numitului complex de fenomene. În acest caz intră fenomenele de masă, compuse din evenimente care constituie colectivități statistice omogene, adică mulțimi cu caracteristici bine definite și cu un număr foarte mare de elemente. Exemplu concret avem în mișcarea moleculelor unui gaz într-un recipient de dimensiuni finite. Legile mecanicii ne dau, exact, ecuațiile de mișcare ale fiecărei molecule, dar nu sîntem în posesia aparatului matematic care să ne permită rezolvarea completă a unei astfel de probleme.

Omul de știință, însă, nu poate renunța la rezolvarea unei astfel de probleme din cauza aparatului matematic insuficient. De aceea, în locul aparatului de studiu construit de mecanică sau alte discipline constructive, omul de știință a căutat o altă metodă de calcul, adaptată noilor condiții în care se prezintă fenomenele de masă.

Această nouă metodă este teoria probabilităților conexată cu statistica matematică — știința fenomenelor de masă.

Oricît de bine am cunoaște cauzele evenimentelor pe care le așteptăm, legile statistice sau probabiliste nu ne pot preciza dacă un eveniment anumit se va realiza sau nu, într-un moment dat, ci ne pot permite să calculăm numai probabilitatea ca numitul eveniment să se realizeze sau nu.

Scanned with OKEN Scanner

În consecință, teoria probabilităților se ocupă de studiul evenimentelor pentru care nu putem prevedea, pe baza metodelor constructive, condițiile de realizare a fiecărui eveniment în parte, într-un moment dat.

Numim astfel de evenimente, *evenimente întîmplătoare* prin opoziție cu *evenimentele necesare.*

Prin definiție, *probabilitatea realizării unui eveniment dat este măsura posibilității obiective de realizare a acelui eveniment, într-un proces (experiență, măsurătoare, observație) bine definit.*

Trebuie să precizăm că un eveniment oarecare poate fi considerat ca *întîmplător* sau *necesar* numai în legătură cu *complexul de condiții* în care este studiat. Acest complex de condiții, adică totalitatea împrejurărilor care pregătesc și determină posibilitatea existenței fenomenelor, nu rămîne neschimbat; astfel încît putem concretiza esența legilor probabiliste, precum urmează:

1. Prin fiecare realizare a unui complex de condiții ($\mathcal{C}$) are loc un anumit eveniment A.

2. Probabilitatea ca evenimentul A să aibă loc prin realizarea complexului de condiții ($\mathcal{C}$) are o valoare bine determinată p.

Prin urmare, caracterul specific al unui eveniment — întîmplător, imposibil, sigur — are sens numai în raport cu un complex de condiții bine determinate.

Definiția dată mai sus pentru probabilitate se bazează pe ipoteza existenței, în cadrul complexului de condiții determinat, a unor evenimente de *egală posibilitate.* Vom constata mai tîrziu că domeniul de aplicare a acestei noțiuni este relativ restrîns. De aceea, vom introduce la timp o definiție a probabilității bazată pe concepția colectivităților statistice, în fenomenele de masă.

Ne menținem, pentru moment, în ipoteza existenței evenimentelor egal posibile.

§ 55. Probabilitate matematică

Admitem deci că toate împrejurările în care se poate realiza un anumit eveniment întîmplător sînt *egal posibile,* fapt care, în realitate, nu este realizat riguros, dar pe care experiența ni-l dovedește ca fiind admisibil, cel puțin în primă aproximație, pentru a se ajunge la definirea noțiunilor fundamentale ale calculului probabilităților.

În aceste condiții, numim *„probabilitate matematică" a unui eveniment anumit raportul dintre numărul cazurilor favorabile producerii acelui eveniment și numărul tuturor cazurilor, considerate ca egal posibile.*

Scanned with OKEN Scanner

Fie N numărul tuturor cazurilor egal posibile şi n numărul cazurilor favorabile realizării unui anumit eveniment, sub condiţia evidentă

$$0 \leqslant n \leqslant N . \tag{1}$$

Prin definiţia de mai sus, probabilitatea matematică a evenimentului considerat este dată de expresia

$$p = \frac{n}{N} , \tag{2}$$

fiind satisfăcută, după (1), condiţia

$$0 \leqslant p \leqslant 1 . \tag{3}$$

Dacă nu se realizează evenimentul considerat, spunem că are loc realizarea *evenimentului contrar*, care se notează cu A' şi se numeşte „non A". Pentru acest eveniment contrar rămîn evident numai N-n cazuri disponibile (favorabile), astfel încît probabilitatea sa matematică este

$$q = \frac{N-n}{N} = 1-p , \tag{4}$$

ceea ce ne arată că avem totdeauna satisfăcută relaţia

$$p+q=1 .$$

Pentru $p=1$, $q=0$ spunem că evenimentul considerat este *sigur*. Evenimentul sigur se notează cu E. Dacă $p \to 1$, $q \to 0$ spunem că evenimentul A este foarte probabil; dacă $p=0$, $q=1$ zicem că s-a realizat evenimentul contrar A'.

§ 56. Observaţii

1. Noţiunea de „eveniment întîmplător" precum şi definiţia clasică „a priori" a probabilităţii matematice, specifică secolelor al XVIII-lea şi al XIX-lea, a fost supusă în diferite rînduri la critici care încercau să înlăture unele lipsuri şi contradicţii principiale. Astfel, se obiectează că definiţia clasică
a) reduce definiţia probabilităţii la noţiunea de probabilitate egală, fără să o definească în prealabil pe aceasta din urmă (fiind vorba de evenimente egal „posibile", deci egal probabile);
b) nu poate fi aplicată la fenomene pur statistice, unde nu se poate vorbi de probabilitate egală;
c) nu are sens cînd numărul evenimentelor posibile este infinit.
R. Mises a încercat o definiţie „a posteriori", empirică, folosind noţiunea de frecvenţă. Dar faptul că se introduce o noţiune de limită care nu poate fi definită matematic şi că şirul frecvenţelor poate să nu posede o limită cînd numărul probelor tinde către infinit, definiţia îşi pierde caracterul obiectiv.

Scanned with OKEN Scanner

B. V. Gnedenko şi A. I. Hincin introduc definiţia a posteriori drept „raportul dintre numărul mediu al rezultatelor *reuşite* prin observaţie şi numărul total al observaţiilor individuale", care tinde să evite procesul de trecere la limită, specific definiţiei propusă de Mises, prin ipoteza existenţei stabilităţii şirului de valori ale raportului în jurul unui punct de acumulare, care este însăşi valoarea medie admisă. A. N. Kolmogorov propune o definiţie pur axiomatică, dezvoltată apoi de diverşi autori, care prezintă mari avantaje principiale.
Cum scopul expunerii de faţă nu urmăreşte o amplă dezvoltare a teoriei probabilităţilor, ci numai aplicaţia acestei teorii în calculul erorilor de măsurare, ne mulţumim cu o foarte sumară expunere a principiilor de bază, în forma cea mai simplă, şi trimitem pentru amănunte şi precizări la lucrările citate în bibliografie.
Ne oprim deci la definiţia clasică a noţiunii de probabilitate matematică, cum am dat-o mai sus.
2. Pentru definirea probabilităţii matematice este necesar să se poată realiza un proces bine definit de numărare, atît a cazurilor posibile, cît şi a cazurilor favorabile. Dacă procedeul de numărare nu este bine definit, definiţia de mai sus poate duce la ambiguitate.

§ 57. Cîmp de evenimente

Din cele precedente rezultă că obiectele principale ale calculului probabilităţilor sînt *evenimentele* întîmplătoare şi probabilităţile lor. O experienţă unică, prin care se pune în evidenţă un singur eveniment, nu interesează calculul probabilităţilor.

Experienţele cărora le corespund mai multe evenimente se bucură de proprietăţi pasibile de formulări matematice. Ele formează împreună o *structură* formulabilă matematic şi pe care o vom numi *cîmp de evenimente*, ale cărui proprietăţi le studiem. Unei experienţe îi corespunde un cîmp de evenimente.

§ 58. Exemplu de numărare probabilistă. Problema alternativei

Se examinează realizarea evenimentului A sau a contrariului său B, printr-o succesiune de procese, astfel încît fiecare proces ne dă rezultatul unic: sau A sau B. Probabilitatea matematică a evenimentului A, respectiv B, este evident $1/2$; chiar dacă evenimentul A s-a succedat eventual de 20 ori, la al 21-lea proces apariţia lui A va avea tot probabilitatea $1/2$.

Operaţiile succesive trebuie să fie perfect independente între ele. Operaţia „sau" se notează simbolic prin $\cup$, numită, ca şi în teoria mulţimilor, *reuniune*.

Printr-un singur proces putem avea cazurile

$$A;\quad B;\quad \text{deci}\quad A \cup B;$$

Scanned with OKEN Scanner

prin două procese succesive putem avea

$$AA,\ AB;\quad BA,\ BB,$$

ceea ce constituie exact termenii produsului

$$(A+B)(A+B)=(A+B)^2=AA+AB+BA+BB\ .$$

Observăm că evenimentul AB înseamnă A și B. Operația „și" se notează cu $\cap$ și se numește *intersecție*.

Prin trei procese succesive putem avea

$$AAA,\ ABA;\quad BAA,\ BBA;$$
$$AAB,\ ABB;\quad BAB,\ BBB,$$

care constituie termenii produsului

$$(A+B)(A+B)(A+B)=(A+B)^3.$$

Repetînd raționamentul pentru un șir de n procese identice (A sau B), toate cazurile posibile sînt exprimate prin cei 2^n termeni ai dezvoltării binomului

$$(A+B)^n=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\cdots+C_n^kA^{n-k}B^k+\cdots+B^n. \qquad (6)$$

Dacă considerăm în rezultatul unui șir de n procese alternative, numărul total de evenimente A și numărul total de evenimente B, probabilitățile diferitelor cazuri nu sînt egale, ci se raportează între ele ca și coeficienții binomului (6). Astfel, probabilitatea matematică de a obține de k ori evenimentul B, din n procese alternative, este

$$\frac{1}{2^n}C_n^k=\frac{n!}{2^n k!\,(n-k)!}, \qquad (7)$$

căci, după (6), numărul total de cazuri este, precum am mai spus, 2^n, egal cu suma coeficienților expresiei (6), ceea ce se obține făcînd $A=B=1$ în dezvoltarea (6).

Exemple numerice. 1. La livrarea unui produs industrial dintr-o fabrică se fac pachete de cîte 500 piese, cu condiția ca rebutul să nu depășească 10% din totalul livrat. Recepționarea se face prin luarea de probe din fiecare pachet, și anume, de 100 piese luate la întîmplare. Se întreabă, care este probabilitatea ca printre aceste 100 piese să se găsească cel puțin 10 piese defecte.

Numărul tuturor cazurilor posibile este dat de combinările de 500 piese luate cîte 100

$$C_{500}^{100}=\frac{500!}{100!\ 400!}\ .$$

Numărul cazurilor favorabile se poate evalua formînd grupuri de cîte 90 piese, la care adăugăm cele 10 defecte; deci numărul cazurilor favorabile este

$$C_{490}^{90}=\frac{490!}{90!\,400!}.$$

Probabilitatea este deci

$$p=\frac{490!}{90!\,400!}:\frac{500!}{100!\,400!}=\frac{490!\,100!}{90!\,500!}\approx 10^{-7}.$$

2. Pentru un examen la care iau parte 15 candidaţi s-au propus cîte 20 subiecte teoretice diferite $T_1, T_2, \cdots, T_{20}$ şi cîte 20 probleme $P_1, P_2, \cdots, P_{20}$, amestecate în două pachete deosebite. Fiecare candidat trage la întîmplare un subiect teoretic şi o problemă, după care cele două subiecte se reamestecă în pachetele respective. Se pune întrebarea: care este probabilitatea ca toţi candidaţii să nimerească cel mai greu subiect teoretic (să-l numim T_5, pentru a fixa ideile) şi cea mai grea problemă (s-o numim P_{12}), adică T_5+P_{12}.

Ca să răspundem la întrebare, este mai comod să procedăm la numărarea cazurilor favorabile evenimentului contrar; nici un candidat să nu nimerească combinaţia T_5+P_{12}.

Numărul tuturor cazurilor posibile este $20\times 20=400$. Numărul cazurilor favorabile evenimentului contrar este $400-1=399$, căci eliminăm din cele 400 cazuri numai cazul T_5+P_{12}. Deci, pentru un candidat, probabilitatea de a nu nimeri combinaţia T_5+P_{12} este $\frac{399}{400}$. Pentru ca toţi cei 15 candidaţi să nu nimerească T_5+P_{12}, probabilitatea este $q=\left(\frac{399}{400}\right)^{15}$. Prin urmare, probabilitatea ca fiecare dintre cei 15 candidaţi să nimerească cea mai grea chestiune este

$$p=1-q=1-\left(\frac{399}{400}\right)^{15}\approx 0{,}04,$$

aşadar, suficient de mică.

Acest exemplu ne-a indicat un alt mod de numărare.

§ 59. Caracterizarea evenimentelor

Fie două evenimente A, B; evenimentul contrar lui A se notează cu A'. Am constatat din cele precedente posibilităţile

a) A sau B; pe care o notăm cu $A \cup B$, numită *reuniune*.

b) A şi B; pe care o notăm cu $A \cap B$, numită *intersecţie*.

Se poate defini un eveniment imposibil, pe care-l notăm cu Φ; de exemplu:

c) $A \cap A' = \Phi$, adică posibilitatea apariţiei evenimentului A şi totodată a contrariului său A' constituie un eveniment imposibil; zicem că evenimentele A şi A' sînt *incompatibile*.

Operaţiile a) şi b) sînt comutative şi asociative

d) $A \cup B = B \cup A$; $\quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile

e) $A \cup \Phi = A$; $A \cap \Phi = \Phi$,

f) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

sînt de asemenea evidente.

Evenimentul sigur este definit prin relaţia $p+q=1$, adică

g) $A \cup A' = E$,

deci, evenimentul „A sau non A“ este evenimentul sigur. Un eveniment B care adunat cu evenimentul A ne dă un eveniment sigur se numeşte *complementar* primului. De exemplu, dacă

$$A \cup B = E,$$

B este complementar lui A. Astfel, după g) evenimentul A' (non A) este complementar cu A.

O altă caracteristică a sistemelor de evenimente este *implicaţia*, sau *incluziunea* şi se notează prin $\subset$. De exemplu, A implică A sau B; B implică A sau B.

i) $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$;

apoi A şi B implică A; A şi B implică B;

j) $A \cap B \subset A$; $A \cap B \subset B$;

De asemenea,

k) $A \subset E$; $\Phi \subset A$.

l) Dacă $C \subset A$, $C \subset B$, atunci $C \subset A \cap B$.

m) Dacă $A \subset C$, $B \subset C$, atunci $A \cup B \subset C$.

Eveniment elementar. Un eveniment A al unui cîmp de evenimente este elementar dacă, faţă de un eveniment oarecare B al cîmpului, apare într-una din situaţiile

α) $A \cap B = \Phi$, deci A este incompatibil cu B;

β) $A \subset B$, adică A implică B.

§ 60. Probabilităţi totale de evenimente elementare

Pentru a fixa ideile, să presupunem că printre N cazuri egal posibile avem a cazuri favorabile unui eveniment A, b cazuri favorabile unui eveniment B şi c cazuri favorabile unui eveniment C. Să presupunem că evenimentele A, B, C sînt *independente*, adică se exclud reciproc, deci cazurile favorabile acestor trei evenimente alcătuiesc *mulţimi distincte*.

Probabilităţile evenimentelor A, B, C sînt, în aceste condiţii,

$$\alpha = \frac{a}{N}, \quad \beta = \frac{b}{N}, \quad \gamma = \frac{c}{N}. \tag{8}$$

Scanned with OKEN Scanner

Probabilitatea ca cel puțin unul dintre aceste trei evenimente să se realizeze este, prin urmare

$$p=\frac{a+b+c}{N}=\alpha+\beta+\gamma. \qquad (9)$$

Putem concepe că A, B, C sînt, de fapt, trei moduri distincte în care se poate realiza un eveniment ($\mathcal{E}$). Generalizînd, se obține astfel *principiul probabilităților totale*, sau *legea adunării probabilităților elementare: dacă un eveniment oarecare poate fi realizat în mai multe moduri care se exclud mutual, probabilitatea acestui eveniment este suma probabilităților care corespund diferitelor moduri de realizare.* De aici decurge *regula de adunare:* probabilitatea ca printr-o operație oarecare să se realizeze unul dintre evenimentele incompatibile A_1, A_2, ..., A_n este egală cu suma probabilităților fiecărui eveniment izolat. Dacă sistemul de evenimente este complet, adică dacă $a+b+c=N$, atunci $p=\alpha+\beta+\gamma=1$.
Sistem incomplet ($\alpha+\beta+\gamma=p\neq 1$). Pe o țintă sînt trase cercuri concentrice cu centrul în punctul de vizare. La un concurs de tir se consideră „foarte bine" lovitura care cade în primul cerc interior și „bine" lovitura care cade între cercul 1 și cel imediat următor, 2. Celelalte lovituri nu sînt luate în seamă. Se întreabă, care este probabilitatea ca, la un foc tras de un concurent, acesta să obțină calificativul „foarte bine" sau calificativul „bine"?
Admitem că din 100 lovituri trase de numitul concurent, 16 nimeresc în primul cerc, 1, deci calificate foarte bine, și 24 nimeresc în cercul 2, calificate bine. Rezultă că probabilitatea ca să obțină o mențiune „foarte bine" este $\alpha=\frac{16}{100}$, iar probabilitatea ca să obțină mențiunea „bine" este $\beta=\frac{24}{100}$. Așadar, probabilitatea ca numitul concurent să obțină unul dintre cele două calificative „foarte bine" *sau* „bine" este

$$p=\alpha+\beta=\frac{16}{100}+\frac{24}{100}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}.$$

Se constată că $a+b\neq N=100$ în această problemă.
Sistem complet ($\alpha+\beta+\gamma=p=1$). Într-o urnă sînt bile albe, roșii și negre. Se efectuează N extrageri, astfel încît după fiecare extragere se introduce bila scoasă înapoi în urnă. Dacă am extras de a ori o bilă albă, de b ori una roșie și de c ori una neagră, probabilitățile respective sînt

$$\alpha=\frac{a}{N},\quad \beta=\frac{b}{N},\quad \gamma=\frac{c}{N},$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît probabilitatea de a extrage o bilă oarecare este

$$p=\frac{a+b+c}{N}=\alpha+\beta+\gamma=1\ .$$

§ 61. Probabilitatea unui eveniment compus

Dacă condiția fundamentală, ca diferitele moduri de realizare să se excludă reciproc, nu este realizată, cele $a+b+c$ cazuri favorabile *încetează de a mai fi distincte;* în realitate, sînt atunci mai puține cazuri favorabile și avem condiția:

$$p<\alpha+\beta+\gamma\ . \tag{10}$$

Pentru a fixa ideile, să considerăm un eveniment complex rezultat din realizarea a două evenimente A și B. Se pot prezenta următoarele posibilități

1. să se producă evenimentul A și evenimentul B;
2. să se producă evenimentul A dar nu B;
3. să se producă evenimentul B dar nu A;
4. să nu se producă nici evenimentul A și nici evenimentul B.

Fie n_1, n_2, n_3, n_4 numerele de cazuri care corespund respectiv acestor patru posibilități. Avem

$$n_1+n_2+n_3+n_4=N\ , \tag{11}$$

N fiind numărul total de cazuri.

Probabilitatea evenimentului complex AB este

$$p=\frac{n_1}{n_1+n_2+n_3+n_4}=\frac{n_1}{N}\ , \tag{12}$$

iar probabilitatea evenimentului simplu A este

$$\pi=\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+n_3+n_4}=\frac{n_1}{N}+\frac{n_2}{N}\ . \tag{13}$$

Știind că s-a produs evenimentul A, probabilitatea ca să se producă B este

$$\pi'=\frac{n_1}{n_1+n_2}\ , \tag{14}$$

căci numărul de cazuri posibile este n_1+n_2, iar numărul de cazuri favorabile evenimentului B este n_1.

Din compararea relațiilor (13), (14) și (12) se observă că avem

$$p=\pi\cdot\pi'\ ; \tag{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

această relație exprimă, pentru două evenimente în care diferitele moduri de realizare nu se exclud reciproc, *principiul probabilităților compuse: dacă un eveniment presupune realizarea a două evenimente parțiale A și B, probabilitatea sa este egală cu produsul probabilității realizării lui A prin probabilitatea ca B să se producă știind că A s-a produs.*

Acest enunț se extinde, evident, și la cazul *mai multor* evenimente compuse, convenind ca fiecare dintre probabilitățile componente să fie probabilitatea realizării evenimentului corespunzător, *în ipoteza realizării prealabile a evenimentelor luate anterior în considerare.*

Această restricție nu mai este utilă dacă evenimentele compuse devin independente.

§ 62. Consecințe

Probabilitatea realizării evenimentului A sau B este

$$\frac{n_1+n_2+n_3}{n_1+n_2+n_3+n_4},$$

iar probabilitățile evenimentelor distincte A, respectiv B, sînt

$$\frac{n_1+n_2}{n_1+n_2+n_3+n_4}, \text{ respectiv } \frac{n_1+n_3}{n_1+n_2+n_3+n_4}.$$

Se constată că probabilitatea lui A sau B = probabilitatea A + + probabilitatea B − probabilitatea lui A și B. Se scrie

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B) \qquad (16)$$

Dacă A și B se exclud mutual, atunci $n_1=0$ și revenim la principiul probabilităților compuse.

§ 63. Teoreme și formule utile

După cum vom constata mai tîrziu, pentru calculul valorilor numerice ale diferitelor formule care dau probabilități, este foarte necesar să se calculeze expresii în care apare factorialul unui număr întreg pozitiv $n!$, adică permutările a n obiecte. Această împrejurare face ca să prezinte un deosebit interes calculul rapid al factorialului, chiar dacă acest calcul este numai aproximativ, bine înțeles cu aproximație acceptabilă, care nu depășește limitele admise, corespunzătoare problemei considerate. În acest scop. s-au construit formule pentru calculul rapid și aproximativ al lui $n!$ „Valorile aproximative“ obținute cu aceste formule diferă „în realitate“ destul

Scanned with OKEN Scanner

de puternic de valoarea exactă — diferența dintre valoarea calculată aproximativ și valoarea exactă fiind chiar crescătoare cu valoarea lui n. Dar, dat fiind că în calculele noastre ceea ce interesează este eroarea relativă și că aceasta este cu atît mai mică, cu cît mărimea de măsurat este mai mare (în speță $n!$) și că eroarea absolută nu poate crește tot atît de repede ca însuși $n!$, rezultă că o determinare chiar mai puțin precisă va fi convenabilă pentru calculul nostru.

Teoremă. *Convergența unui produs cu un număr infinit de factori.* Dacă o serie în care toți termenii au același semn

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i \tag{17}$$

este *absolut* convergentă, atunci produsul

$$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n)=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) \tag{18}$$

tinde către o limită finită și diferită de zero cînd n crește la infinit.

În adevăr, fie r și s două valori ale lui n. Aplicînd logaritmii neperieni în (18), avem

$$\ln(1+\alpha_r)(1+\alpha_{r+1})\cdots(1+\alpha_s)=\sum_{i=r}^{s}\ln(1+\alpha_i)=\sum_{i=r}^{s}\alpha_i(1+\theta_i),$$

unde θ_i tinde către zero cînd i tinde spre infinit.
Or, ultimul membru se compune din două părți

$$\sum_{i=r}^{s}\alpha_i<\varepsilon, \tag{19}$$

unde ε este un număr suficient de mic, dat, pentru r suficient de mare și pentru un s oricît de mare, în virtutea convergenței seriei (17); pe de altă parte, cu atît mai mult

$$\sum_{i=r}^{s}\theta_i\alpha_i<\varepsilon, \tag{20}$$

prin faptul că $\theta_i\to 0$ cînd i tinde spre infinit. Din (19) și (20) rezultă că restul

$$\sum_{i=r}^{s}\alpha_i(1+\theta_i)<2\varepsilon,$$

Scanned with OKEN Scanner

pentru $r \to \infty$ şi $s \to \infty$. Rezultă că seria $\sum_{l=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_l)$ este convergentă şi că produsul (18) tinde către o limită finită diferită de zero.

Formula lui Wallis dă o valoare aproximativă a numărului π (raportul dintre lungimea şi diametrul cercului)

$$\frac{\pi}{2} = \left\{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2k}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}\right\}^2 \frac{1}{2k+1} (1+\varepsilon_k), \tag{21}$$

unde k este un număr întreg pozitiv, foarte mare, iar ε_k un număr dat, oricît de mic, care tinde către zero cînd k tinde spre infinit.

Formula (21) se deduce din evaluarea integralelor

$$\mathcal{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx . \tag{22}$$

O integrare prin părţi ne dă imediat

$$\mathcal{J}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\, d(-\cos x) = -\left|\sin^{n-1} x \cos x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, d(\sin^{n-1} x),$$

de unde

$$\mathcal{J}_n = (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot \cos^2 x \cdot dx =$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cdot dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cdot dx ,$$

sau

$$n\mathcal{J}_n = (n-1)\mathcal{J}_{n-2} . \tag{23}$$

Din formula (23) deducem relaţiile:

— pentru *n par* : $n=2k$, avem succesiv

$$2k \cdot \mathcal{J}_{2k} = (2k-1)\mathcal{J}_{2k-2} ,$$

$$(2k-2)\mathcal{J}_{2k-2} = (2k-3)\mathcal{J}_{2k-4} ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$4\mathcal{J}_4 = 3\mathcal{J}_2 ,$$

$$2\mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_0 ;$$

Scanned with OKEN Scanner

iar

$$\mathcal{I}_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=\frac{\pi}{2}\cdot$$

Rezultă

$$\mathcal{I}_{2k}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}\cdot\frac{\pi}{2};$$

— pentru *n impar* : $n=2k+1$, avem succesiv

$$(2k+1)\,\mathcal{I}_{2k+1}=2k\,\mathcal{I}_{2k-1},$$
$$(2k-1)\,\mathcal{I}_{2k-1}=(2k-2)\,\mathcal{I}_{2k-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$3\,\mathcal{I}_3=\mathcal{I}_1,$$

iar

$$\mathcal{I}_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot dx=1\,.$$

Rezultă

$$\mathcal{I}_{2k+1}=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)(2k+1)}\cdot \tag{25}$$

Compararea formulelor (24) şi (25) ne conduce la formula căutată (21). În adevăr, observăm că în intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ funcţia de sub integrală, $\sin x$, creşte monoton de la 0 la $+1$; avem deci

$$\sin^{2k}x>\sin^{2k+1}x>\sin^{2k+2}x;$$

prin urmare

$$\mathcal{I}_{2k}>\mathcal{I}_{2k+1}>\mathcal{I}_{2k+2},$$

ceea ce se poate scrie

$$1>\frac{\mathcal{I}_{2k+1}}{\mathcal{I}_{2k}}>\frac{\mathcal{I}_{2k+2}}{\mathcal{I}_{2k}}\cdot$$

Dar raportul

$$\frac{\mathcal{I}_{2k+2}}{\mathcal{I}_{2k}}=\frac{2k+1}{2k+2}$$

tinde către 1 cînd k creşte la infinit. Rezultă că şi raportul intermediar va tinde către unitate cînd $k\to\infty$; aşadar, putem scrie

$$\frac{\mathcal{I}_{2k+2}}{\mathcal{I}_{2k}}=1-\varepsilon_k, \tag{26}$$

unde $0<\varepsilon_k\to 0$, cînd $k\to\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

REGIONALĂ
IAȘI

Formula (26) ne dă, cu ajutorul expresiilor (24) şi (25), relaţia căutată (21).

Formula lui Stirling dă o valoare aproximativă a factorialului. Pentru un număr întreg oarecare n avem

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}(1+\varepsilon_n)\,. \tag{27}$$

Pentru a stabili această formulă punem, pentru moment,

$$n!=n^n e^{-n}\sqrt{n}\cdot f(n) \tag{28}$$

şi demonstrăm că funcţia $f(n)$ tinde către o limită determinată cînd numărul întreg n creşte la infinit.

Înlocuind n cu $n+1$, obţinem din (28)

$$(n+1)!=(n+1)^{n+1}\cdot e^{-(n+1)}\sqrt{n+1}\,f(n+1) \tag{29}$$

sau, împărţind membru cu membru (29) prin (28), rezultă

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=e\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Aplicînd logaritmul neperian, deducem

$$u_n=\ln\frac{f(n+1)}{f(n)}=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right);$$

utilizînd formula de dezvoltare a logaritmului

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

rezultă

$$u_n=\ln f(n+1)-\ln f(n)=1-\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots\right)$$

sau

$$u_n=-\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{12n^3}+\cdots$$

În primul rînd se observă că $f(n+1)<f(n)$. Apoi, seria al cărei termen general este u_n este absolut convergentă, căci produsul $n^2|u_n|$ are o limită finită pentru n infinit. Rezultă că şi $\ln f(n+1)$ va avea o limită finită pentru n infinit. Dar atunci aceasta este adevărat şi pentru $f(n+1)$, respectiv $f(n)$. Fie C această limită

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=C\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

După (28) rezultă că

$$Cn^n e^{-n}\sqrt{n} \to n! \tag{30}$$

Pentru determinarea constantei C ne servim de formula (21), după ce înmulțim fracția de sub paranteza mare la numărător și la numitor prin $2\cdot 4\cdot 6\ldots 2k$, și scriem formula sub forma

$$\frac{\pi}{2}=\frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k)^4}{(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots 2k)^2}\cdot\frac{1}{2k+1}(1+\varepsilon_k)=\frac{2^{4k}(k!)^4}{(2k)!^2(2k+1)}(1+\varepsilon_k).$$

După (30) punem

$$k!=Ck^k e^{-k}\sqrt{k};\quad (2k)!=C(2k)^{2k}e^{-2k}\sqrt{2k}\,.$$

Rezultă

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2^{4k}C^{4k}e^{-4k}k^2(1+\varepsilon_k)}{C^2(2k)^{4k}e^{-4k}\,2k(2k+1)}=\frac{kC^2}{2(2k+1)}(1+\varepsilon_k),$$

ceea ce se mai poate scrie, trecînd la limită

$$\pi=C^2\lim_{k\to\infty}\frac{k}{2k+1}(1+\varepsilon_k)=\frac{1}{2}C^2\,.$$

Rezultă deci

$$C=\sqrt{2\pi}, \tag{31}$$

valoare care înlocuită în formula (30) ne conduce la formula căutată (27).

Este ușor să ne dăm seama de eroarea pe care o comitem înlocuind $n!$ prin $\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}=\varphi(n)$, printr-un exemplu numeric. Fie $n=20$; obținem

$$20!=243\ 290\ 200\ 817\ 664\ 000\ 0=2{,}4329\cdot 10^{18},$$
$$\varphi(20)=242\ 278\ 638\ 551\ 040\ 000\ 0\cdots=2{,}4228\cdot 18^{18};$$

așa dar, o eroare relativă cuprinsă între patru și cinci miimi.

§ 64. Distribuția a două evenimente contrare prin probe repetate (distribuția binomială)

Să presupunem că efectuăm un șir de probe care pot da loc numai la unul sau altul dintre două evenimente, ale căror probabilități să fie constante.

Fie p probabilitatea uneia dintre alternativele favorabile și $q=1-p$ probabilitatea uneia dintre alternativele nefavorabile. Să presupunem că s-au efectuat n probe consecutive. Dacă presupunem că cele două evenimente trebuie să se succeadă într-o *anumită ordine*, avînd k probe favorabile și $n-k$ nefavorabile, evenimentul con-

siderat va fi un eveniment compus avînd ca probabilitate produsul $p^k q^{n-k}$. Dar dacă privim ca distincte succesiunile evenimentelor *care nu diferă decît prin ordinea lor*, același grup putînd să apară de atîtea ori cîte combinări de k obiecte se pot face cu cele n obiecte date, adică C_n^k, obținem ca valoare a probabilității evenimentului considerat mărimea

$$P_k = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} p^k q^{n-k}$$

sau

$$P_k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}, \tag{32}$$

adică termenul de ordinul $(n-k+1)$ din dezvoltarea lui $(p+q)^n$. Cum $p+q=1$, suma probabilităților tuturor grupurilor posibile este egală cu unitatea (siguranță).

Care este grupul cel mai probabil? Adică, fiind date probabilitățile p și q precum și numărul n al probelor, care este valoarea lui k (întreg pozitiv) care corespunde celei mai mari valori posibile a lui P_k?

Să considerăm trei termeni consecutivi

$$\left.\begin{aligned} P_{k+1} &= \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1}, \\ P_k &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k q^{n-k}, \\ P_{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} p^{k-1} q^{n-k+1} \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

și să luăm raportul termenului mijlociu către ceilalți doi

$$\frac{P_k}{P_{k+1}} = \frac{k+1}{n-k} \frac{q}{p}; \quad \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{n-k+1}{k} \frac{p}{q}. \tag{34}$$

Dacă și primul raport și al doilea este mai mare ca 1, rezultă că P_k este cea mai mare valoare căutată; prin urmare, în acest caz

$$P_{k-1} < P_k > P_{k+1};$$

așadar

$$(n-k+1)\,p > kq,$$
$$(n-k)\,p < (k+1)\,q$$

sau, cum $p+q=1$, rezultă

$$np-q<k<np+p\,, \tag{35}$$

astfel încît k este *singurul număr întreg* cuprins între cele două numere: $np-q$ şi $np+p$, care diferă între ele prin unitate, deoarece

$$(np+p)-(np-q)=p+q=1\,.$$

Un caz de îndoială se prezintă dacă cele două numere $np-q$ şi $np+p$ sînt, ele însele, numere întregi; atunci

$$\left.\begin{aligned} k_1&=np-q\,,\\ k_2&=np+p=k_1+1 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

se referă la doi termeni egali din dezvoltarea binomului $(p+q)^n$. În definitiv, din cele două cazuri (35) şi (36) putem conchide că cea mai mare valoare a lui P_k este atinsă dacă valoarea lui k este întregul cel mai apropiat de valoarea medie np, care este valoarea cea mai probabilă, de unde rezultă că $n-k$ este întregul cel mai apropiat de nq.

§ 65. Calculul valorii asimptotice a lui P_k. Legea lui Laplace-Gauss

Pentru valori mici ale lui n, expresia (32) nu prezintă interes. Aplicaţiile importante ale acestei formule se evidenţiază pentru valori mari ale lui n. Dar în acest caz, calculul numeric direct al lui P_k este practic imposibil. De aceea se procedează la calculul valorii asimptotice, după cum urmează. Înţelegem prin „valoare asimptotică“ valoarea aproximativă a lui P_k pentru un n suficient de mare, aplicînd formula lui Stirling şi teorema de convergenţă a unui produs infinit.

În acest scop, introducem în locul lui k o variabilă auxiliară t definită prin relaţia

$$k=np-t\sqrt{n}\,, \tag{37}$$

de unde, în virtutea relaţiei

$$p+q=1\,,$$

rezultă

$$n-k=nq-t\sqrt{n}\,. \tag{38}$$

După teorema asupra produselor infinite (§ 63), în locul produsului de factori vom lua suma logaritmilor acestor factori, aplicînd logaritmii neperieni în formula (32), care exprimă valoarea lui P_k.

Scanned with OKEN Scanner

Observăm, în prealabil, că aplicarea logaritmilor în formula (27) ne dă

$$\ln n! = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \varepsilon_n , \tag{39}$$

deoarece $\varepsilon_n < 1$, şi putem scrie în bună aproximaţie

$$\ln(1+\varepsilon_n) \approx \varepsilon_n .$$

Aplicînd acum logaritmii neperieni în expresia (32) obţinem

$$\ln P_k = \ln n! - \ln(np+t\sqrt{n})! - \ln(nq-t\sqrt{n})! + \\ + k\cdot\ln p + (n-k)\ln q . \tag{40}$$

Putem scrie pentru (40). ţinînd seama de (39)

$$\ln P_k = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + \varepsilon_n - \left(np+t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\ln(np+ \\ +t\sqrt{n}) + (np+t\sqrt{n}) - \ln\sqrt{2\pi} - \varepsilon_k - \left(nq-t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\ln(nq-t\sqrt{n}) + \\ + (nq-t\sqrt{n}) - \ln\sqrt{2\pi} - \varepsilon_{n-k} + k\cdot\ln p + (n-k)\ln q . \tag{41}$$

Dar

$$(np+t\sqrt{n}) + (nq-t\sqrt{n}) = n(p+q) = n$$

$$\ln np\left(1+\frac{t}{p\sqrt{n}}\right) = \ln np + \ln\left(1+\frac{t}{p\sqrt{n}}\right)$$

$$\ln nq\left(1-\frac{t}{q\sqrt{n}}\right) = \ln nq + \ln\left(1-\frac{t}{q\sqrt{n}}\right)$$

$$\left\{n+\frac{1}{2}-\left(np+t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)-\left(nq-t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right\}\ln n = -\frac{1}{2}\ln n\right.$$

$$\left\{k-\left(np+t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\right\}\ln p = -\frac{1}{2}\ln p$$

$$\left\{(n-k)-\left(nq-t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\right\}\ln q = -\frac{1}{2}\ln q .$$

Cu aceste expresii, formula (41) devine

$$\ln P_k = -\frac{1}{2}\ln(npq) - \ln\sqrt{2\pi} + \varepsilon_n - \varepsilon_k - \varepsilon_{n-k} - \\ -\left(np+t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{t}{p\sqrt{n}}\right) - \\ -\left(nq-t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{t}{q\sqrt{n}}\right). \tag{42}$$

Scanned with OKEN Scanner

Evaluarea asimptotică a lui P_k o facem în ipoteza

$$\frac{t}{p\sqrt{n}}<1, \quad \frac{t}{q\sqrt{n}}<1 \tag{43}$$

pentru n suficient de mare, ceea ce este pe deplin justificat dacă t nu este prea mare, ipoteză în concordanţă cu experienţa, după cum vom arăta mai departe.
Dezvoltînd funcţiile logaritmice care figurează în membrul al doilea al relaţiei (42), obţinem

$$\left(np+t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{t}{p\sqrt{n}}\right)=$$
$$=\left(np+t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{t}{p\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2p^2n}+\frac{t^3}{3p^3n\sqrt{n}}-\cdots\right),$$
$$\left(nq-t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1-\frac{t}{q\sqrt{n}}\right)=$$
$$=\left(nq-t\sqrt{n}+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{t}{q\sqrt{n}}-\frac{t^2}{2q^2n}-\frac{t^3}{3q^3n\sqrt{n}}-\cdots\right).$$

Introducînd aceste valori în expresia (42) obţinem

$$\ln P_k=\left|-\frac{1}{2}\ln 2\pi npq-\frac{t^2}{2pq}+\frac{t^3}{6\sqrt{n}}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{q^2}\right)+\frac{t}{2\sqrt{n}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right), \right. \tag{44}$$

unde termenii neglijaţi sînt mult prea mici în comparaţie cu termenii menţinuţi şi unde am neglijat $\varepsilon_n-\varepsilon_k-\varepsilon_{n-k}\ll 1$.
În cazul în care probabilitatea favorabilă evenimentului considerat este egală cu probabilitatea favorabilă evenimentului contrar, ultimii doi termeni dispar automat. În cazul $p\neq q$, din condiţiile (43) rezultă că ultimii doi termeni dispar pentru un n suficient de mare şi pentru un t nu prea mare, ceea ce are loc efectiv în practică. Aşadar, sîntem conduşi să păstrăm numai primii doi termeni din expresia (44)

$$\ln P_k=\ln\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}-\frac{t^2}{2pq},$$

de unde, trecînd de la logaritmi la numere, rezultă formula asimptotică pe care o căutăm

$$P_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{t^2}{2pq}}. \tag{45}$$

După cum am arătat, această formulă asimptotică nu este valabilă decît pentru $t\ll\sqrt{n}$, după cum am presupus. Totuşi, ea se extinde

în calculele practice, fără o eroare apreciabilă, dacă n este suficient de mare, la toate valorile posibile ale variabilei t. Această extrapolare este justificată prin faptul că atît valoarea exactă a lui P_k, cît şi valoarea asimptotică a lui P_k, sînt foarte mici de îndată ce t devine destul de mare, astfel încît diferenţa lor este ea însăşi efectiv neglijabilă, după cum vom verifica numeric mai tîrziu.

§ 66. Legea evenimentelor rare. Formula lui Poisson

Am văzut că formula exponenţială a lui Laplace (46) este o valoare asimptotică a expresiei probabilităţii de probe repetate (32), dar în anumite condiţii pe care le-am specificat. Dacă însă probabilitatea p este foarte mică (evenimentele sînt foarte rare), iar n este suficient de mare, astfel încît să avem satisfăcută condiţia

$$np=a\,,$$

unde a este o constantă, se poate da expresiei (32) o altă formă asimptotică decît (45).
În adevăr, putem scrie pentru expresia (32)

$$P_k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k q^{n-k}.$$

Înlocuind $p=\frac{a}{n}$, conform condiţiei admise, obţinem

$$P_k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\frac{a^k}{k!}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}.$$

Dar cum avem

$$\lim_{n=\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}=1$$

$$\lim_{n=\infty}\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-k}=e^{-a},$$

rezultă valoarea asimptotică

$$P_k=\frac{a^k}{k!}e^{-a} \qquad (46)$$

numită *formula lui Poisson.*

§ 67. Noţiuni elementare de statistică matematică

În cele ce preced, ne-am menţinut pe punctul de vedere clasic în definiţia noţiunii de probabilitate, punct de vedere care se bazează

Scanned with OKEN Scanner

pe noţiunea de *egală posibilitate* a unor evenimente anumite. După cum am arătat în § 56, această definiţie s-a dovedit neîndestulătoare, întrucît are un domeniu prea restrîns de aplicare. Cînd se trece de la problemele schematice simple la considerarea problemelor din ce în ce mai complicate din ştiinţele naturii şi din tehnică, definiţia clasică se loveşte de serioase dificultăţi. Prima întrebare care se pune este dacă în majoritatea cazurilor se poate defini raţional şi univoc noţiunea de „evenimente cu posibilităţi egale de realizare".

Diferitele chestiuni privind fenomenele sociale sau procesele de tehnică, precum şi multe probleme din ştiinţele naturii, conduc la căutarea şi descoperirea unor legi condiţionate în primul rînd de caracterul de masă al fenomenului şi care depind numai în măsură relativ neînsemnată de natura particularităţilor numitului fenomen. În acest mod rezultă fie că evenimentul studiat trebuie să fie propriu unei părţi dintr-un număr mare de obiecte de acelaşi fel, fie că şi complexul de condiţii în care se realizează sau nu fenomenul considerat se poate repeta de un număr nelimitat de ori.

Deoarece teoria probabilităţilor nu studiază evenimente întîmplătoare *izolate*, ci numai totalităţi de fenomene de acelaşi fel, această teorie poate fi privită ca o *ştiinţă a fenomenelor de masă*, care au loc în *colectivităţi statistice*.

Întrucît fundamentarea statistică a noţiunii de probabilitate prezintă nu numai un mare cîmp de aplicaţii, dar şi posibilitatea unei definiţii structurale, scoasă direct din experienţă şi bazată pe legăturile dintre evenimente naturale, redăm în cele ce urmează o expunere succintă a bazelor statisticii matematice, ceea ce ne va permite o interpretare mai justă a unor rezultate şi noţiuni, fără a intra în dezvoltări care ies din cadrul expunerii de faţă.

§ 68. Colectivităţi statistice. Distribuţia unei colectivităţi statistice

Orice studiu statistic concret are drept scop analiza anumitor mulţimi concrete, lucruri sau fenomene, care au un complex de caracteristici comune, calitative sau cantitative. O astfel de mulţime reprezintă, din punctul de vedere al acestor caracteristici, un tot unitar, ale cărui elemente sînt într-o legătură reciprocă. pe de o parte, iar pe de altă parte, se pot repartiza în unităţi distincte, dacă le considerăm din punctul de vedere al altor caracteristici. Se pot forma astfel mulţimi statistice în care elementele se pot strînge în grupe sau clase, putîndu-se calcula numărul elementelor care le aparţin.

Scanned with OKEN Scanner

Standardul 2631-51 definește colectivitatea statistică precum urmează: „O mulțime formată din unități calitativ omogene care au un număr de însușiri esențial comune".

Dăm cîteva exemple lămuritoare: mulțimea oamenilor care constituie populația unei țări sau a unui oraș; caracteristică: distribuția după vîrstă; mulțimea rezultatelor unei măsurători; caracteristică: valorile numerice; mulțimea ostașilor dintr-o unitate destul de numeroasă; caracteristică: circumferința toracelui. Astfel de colectivități au o *distribuție discretă:* șirul de unități care determină diferitele valori ale caracteristicii este un șir discret de numere.

Există și colectivități alcătuite dintr-o infinitate de elemente, numite colectivități cu *distribuție continuă.* Exemplu tipic: distribuția unei mase materiale de-a lungul punctelor unui segment de dreaptă, în mod uniform.

Mai redăm cîteva date de terminologie din STAS 2631-51; numim

— „unitate statistică: unul dintre elementele unei colectivități statistice";

— „caracteristică: una dintre însușirile unităților din colectivitatea studiată, care este supusă cercetării statistice";

— „șir statistic cu o caracteristică: șirul de valori obținut cînd se face ca fiecărei unități a colectivității considerate să-i corespundă valoarea respectivă atribuită caracteristicii urmărite. Material, acest șir se poate prezenta sub forma unei liste enumerative, fie sub forma unei colecții de fișe, fie conținînd valoarea caracteristicii cîte unei unități".

Exemple numerice de colectivități statistice și de distribuția lor.

1. *Distribuția populației Romîniei după vîrste* (caracteristica ce definește structura colectivității), în anul 1930

Vîrsta (ani)	Numărul	Procentul	Vîrsta (ani)	Numărul	Procentul
0— 4	2 630 035	14,6	55—59	582 948	3,2
5— 9	2 192 663	12,1	60—64	416 847	2,3
10—14	1 444 928	8,0	65—69	380 222	2,1
15—19	2 108 272	11,7	70—74	195 649	1,1
20—24	1 616 190	9,0	75—79	127 706	0,7
25—29	1 557 460	8,6	80—84	41 618	0,23
30—34	1 078 188	6,0	85—89	19 584	0,12
35—39	1 172 461	6,5	90—94	4 780	0,02
40—44	903 319	5,0	95—99	3 250	0,02
45—49	920 024	5,1	100 și peste	1 074	0,01
50—54	582 210	3,2	Nedeclarată	73 468	0,4
			Total	18 052 896	100

Scanned with OKEN Scanner

2. *Distribuția unei colectivități formată din rezultatele unei măsurători.* Bessel a măsurat diametrul lui Saturn obținînd următoarele 40 de rezultate

				Valori găsite cu eroarea ±0,05"	De cîte ori se repetă aceeași valoare
38,91"	39,35"	39,14"	39,02"	38,95"	2
39,32	25	40	01	39,05	4
38,93	14	36	86	15	4
39,31	47	20	51	25	5
17	29	42	17	35	9
04	32	30	60	45	9
57	10	41	54	55	3
46	33	43	45	65	2
30	28	43	72	75	1
03	62	36		85	1
Caracteristică: eroarea ± 0,05".					

§ 69. Distribuția unei colectivități cu repartiție continuă

Fie o masă materială de m grame pe care trebuie s-o distribuim uniform pe întinderea segmentului $\overline{OA}$ (fig. 6). Modul de repartiție este o funcție de mărimea segmentului parțial respectiv; de exemplu, $\overline{OM}=x$; $\overline{OM'}=x'$. Fie $f(x)$ masa aflată în segmentul OM, considerînd că extremitatea M nu aparține segmentului.

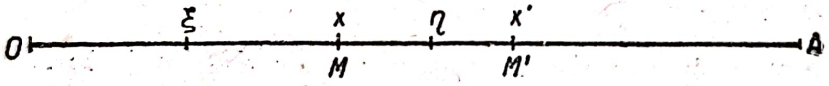


Fig. 6

Este clar că funcția $f(x)$ este crescătoare, astfel încît avem

$$f(x')-f(x)\geqslant 0\text{, pentru } x'>x,$$

diferența precedentă fiind pozitivă dacă există masă în segmentul $\overline{MM'}$ (cu excluderea lui M, dar cuprinzînd M') și nulă dacă în acest segment nu există masă. Funcția $f(x)$ este considerată continuă în intervalul OA, sau în porțiuni din acest interval.
Dacă există puncte de discontinuitate, acestea vor fi definite prin condiția

$$\lim_{\substack{\xi\to x \text{ prin valori crescătoare}\\ \eta\to x \text{ prin valori descrescătoare}}}\{f(\eta)-f(\xi)\}=m_x,$$

unde m_x este un număr finit, diferit de zero, numit masa punctului M de abscisă x.

Scanned with OKEN Scanner

§ 70. Funcţia de distribuţie şi funcţia de densitate în cazul unei variabile continue

Funcţia $f(x)$ se numeşte *funcţie de distribuţie*. Dacă ea este continuă în punctul de abscisă x, avînd şi derivată în acest punct, putem scrie

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \varphi(x),$$

unde $\varphi(x)$ se numeşte *funcţia de densitate a distribuţiei* sau pe scurt *funcţia de densitate*. Atunci, elementul infinitezimal de masă conţinută în segmentul $(x, x+dx)$ este

$$df(x) = \varphi(x)\,dx .$$

Pentru definirea univocă a funcţiei, respectiv a densităţii, se pune *condiţia de normare* (alegerea *unităţii*)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1 , \tag{47}$$

condiţie care posedă o interpretare concretă, deosebit de importantă în teoria probabilităţilor.

Exemple. 1. Admitem că în intervalul (a, b) funcţia $\varphi(x)$ satisface relaţiile de distribuţie

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ pentru } x<a, \\ c \text{ pentru } a<x<b, \\ 0 \text{ pentru } x>b . \end{cases}$$

Condiţia de normare (47) ne dă

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = \int_a^b c \cdot dx = c(b-a) = 1, \text{ deci } c = \frac{1}{b-a} . \tag{48}$$

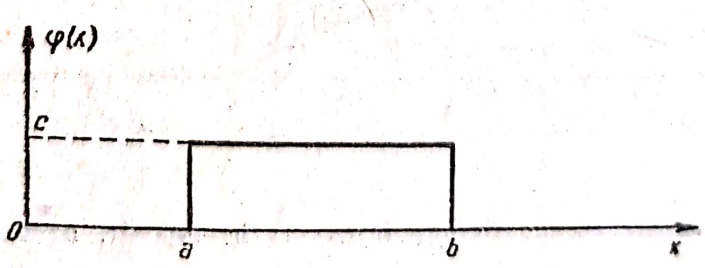


Fig. 7

Graficul funcţiei $\varphi(x)$, după (48), este dat de fig. 7.

Scanned with OKEN Scanner

2. Fie

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 \text{ pentru } x<a,\ x>b, \\ k(x-a) \text{ pentru } a<x<\dfrac{a+b}{2}, \\ -k(x-b) \text{ pentru } \dfrac{a+b}{2}<x<b. \end{cases}$$

Graficul funcției $\varphi(x)$ este cel din fig. 8.

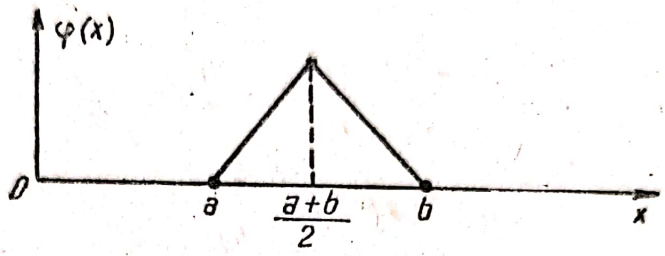


Fig. 8.

Condiția de normare dă

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}} k(x-a)\,dx-\int_{\frac{a+b}{2}}^b k(x-b)\,dx=1;$$

rezultă

$$k=\frac{4}{(b-a)^2}.$$

3. Fie

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 \text{ pentru } x<0,\ x>2, \\ \dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{x^2}{4}\right) \text{ pentru } 0<x<2. \end{cases}$$

Graficul este dat în fig. 9.

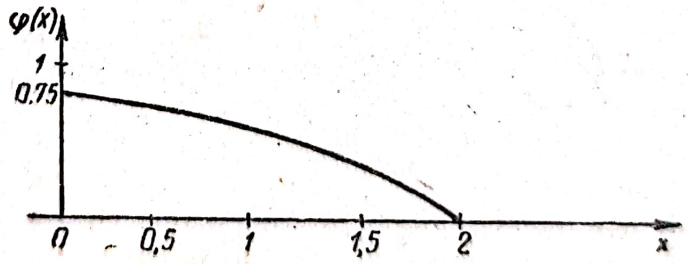


Fig. 9.

Condiția de normare este satisfăcută direct; în adevăr, avem

$$\int_0^2 \varphi(x)\,dx=\frac{3}{4}\int_0^2\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=1.$$

4. După cum vom vedea mai tîrziu, o funcţie importantă de densitate este funcţia similară celei care figurează în formula (45) şi pe care o vom studia amănunţit mai tîrziu

$$\varphi(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}, \tag{48}$$

unde h este o constantă.
Funcţia (48) defineşte ceea ce se numeşte o *colectivitate normală*, adică de distribuţie normală.
Pe lîngă distribuţiile examinate în această lucrare, diferite probleme de producţie, de tehnică sau de fizică au condus la alte tipuri de distribuţie, dintre care citǎm pe cele mai uzuale: distribuţiile Pearson, Student, Gama, χ^2, Bortkievici, C-Maxwell, Max Planck, Bose-Einstein, Fermi-Dirac, Levi-Civită (masa variabilă) etc.

§ 71. Noţiunea statistică de probabilitate

Studiul problemelor statistice arată că între evaluările numerice ale diferitelor fenomene există rapoarte sensibil constante; de exemplu, raportul numărului de naşteri faţă de numărul locuitorilor nu variază prea mult într-o epocă normală dată şi într-o regiune dată, dacă observaţia se face mai mulţi ani consecutivi. Un astfel de fenomen nu este comparabil *a priori* cu procesul de numărare a cazurilor favorabile şi posibile, care ne-a condus la definiţia anterioară a probabilităţii teoretice (matematice). Putem spune că între probabilitatea statistică (experimentală) şi între probabilitatea matematică (teoretică) este aceeaşi deosebire ca între figurile geometrice şi reprezentările lor întîlnite în natură, de exemplu între o sferă şi o portocală. Asupra probabilităţilor matematice putem efectua calcule şi raţionamente riguroase; dar consecinţele acestor calcule nu sînt aplicabile la cazuri concrete decît aproximativ. Se poate pune şi problema inversă: din datele experimentale, în anumite condiţii, să deducem legile probabiliste.
Problema mai prezintă şi alt aspect. De exemplu, ne întrebăm care este probabilitatea ca, luînd fără alegere un element oarecare din mulţimea unei colectivităţi statistice, acest element să prezinte o anumită caracteristică bine definită? Exemplu: luînd arbitrar o persoană din mijlocul unei anumite populaţii, care este probabilitatea ca ea să aibă o anumită vîrstă (caracteristica distribuţiei). În acest sens, probabilitatea este determinată de masa corespunzătoare caracteristicii respective în distribuţia colectivităţii — în exemplul nostru, de numărul persoanelor care au vîrsta fixată, faţă de numărul total al persoanelor care constituie populaţia respectivă. Observăm că probabilitatea unui eveniment al colectivităţii depinde nu numai de *distribuţia* acestuia, dar şi de natura *operaţiei* care ne conduce la alegerea arbitrară a unora dintre elementele colectivităţii.

Scanned with OKEN Scanner

Putem defini probabilitatea statistică precum urmează. Fiind dat un complex de condiţii ($\mathcal{C}$), evenimentul A poate, sau nu poate, să se realizeze. Dacă facem n încercări, vom constata că raportul numărului k de apariţii ale evenimentului A în aceste n încercări, către numărul n total de probe, se va comporta foarte neregulat în cazul unui număr mic de probe şi va deveni aproape invariabil pentru un număr suficient de mare de probe. Această experienţă ne va arăta că, dacă evenimentul A are probabilitatea matematică p, raportul definit mai sus va oscila în jurul valorii p, arătînd prin aceasta un caracter de stabilitate.

§ 72. Cîteva definiţii
(după STAS 1839-50)

— Fenomen statistic: fenomen de masă care depinde, parţial, de anumite cauze şi condiţii date, fără a fi determinat numai de ele (fenomenul este complet determinat numai de totalitatea cauzelor şi condiţiilor). De exemplu, apariţia unei anumite valori pentru o dimensiune dată la o piesă oarecare dintr-un şir mare de piese de acelaşi fel, uzinate pe aceeaşi maşină etc.
— Variabilă statistică (aleatorie): mărime care caracterizează un fenomen statistic. Ea poate fi continuă, dacă poate lua un şir continuu de valori într-un interval finit sau infinit dat, sau discretă, cînd poate lua numai un şir discret de valori.
— Probabilitatea apariţiei unei anumite valori a variabilei statistice discrete: raportul dintre numărul cazurilor favorabile apariţiei valorii respective şi numărul total de cazuri posibile.
— Lege de probabilitate (de repartiţie) a unei varabile statistice: relaţie generală de dependenţă a probabilităţii unui fenomen statistic de variabila statistică.

§ 73. Noţiunea de dependenţă funcţională şi dependenţă statistică

În completarea definiţiilor de mai sus, reproduse după standardul citat, adăugăm consideraţiile următoare. Noţiunea fundamentală din analiza matematică, precum şi a tuturor aplicaţiilor ei, este noţiunea de „funcţie". În analiza matematică, o mărime variabilă y este definită ca funcţie de o altă mărime variabilă x, dacă pentru orice valoare arbitrară dată a lui x, într-un domeniu de variaţie bine definit, corespunde pentru y una sau mai multe valori (putînd fi chiar în număr infinit), în general după relaţia funcţională $y=f(x)$. Putem spune că funcţia y este definită prin mulţimea valorilor lui $f(x)$, care corespunde mulţimii tuturor valorilor lui x în domeniul considerat. Caracteristic este faptul că diferitele valori ale lui $f(x)$ acoperă un şir discret de numere care sînt egal îndreptăţite şi simultan valabile, iar o alegere limitativă între ele se poate face numai prin condiţii suplimentare specifice problemei date;

Scanned with OKEN Scanner

de exemplu, funcţia $y=\arcsin x$ este multiformă, avînd o infinitate de valori; ea devine însă unic determinată în domeniul $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Pe lîngă această dependenţă funcţională, definită în analiza matematică, se utilizează în statistica matematică şi în teoria probabilităţilor o noţiune de funcţie mai puţin restrictivă şi anume, unei valori date a variabilei x nu îi corespunde numai una sau mai multe valori *bine determinate* pentru y, ci un domeniu de extindere dată în care y poate să fie conţinut. Acest domeniu nu este caracterizat numai prin frontierele sale, ci şi prin probabilitatea ca y să ia una oarecare dintre valorile cuprinse în acest domeniu. În ceea ce priveşte cuprinsul său, un astfel de domeniu poate să consiste dintr-un număr finit de valori numerice, sau să fie extins continuu asupra unui interval de y, finit sau infinit.

Legătura dintre variabilele x şi y care este stabilită prin astfel de prescripţii se numeşte *dependenţă statistică* (numită şi *stochastică*), iar variabilele x şi y iau numele de *variabile aleatorii* sau *statistice*. Un exemplu de astfel de variabile aleatorii ni-l oferă teoria erorilor de măsurare. O mărime măsurabilă satisface în realitate o funcţie $z=f(x)$. Operaţia de măsurare nu ne va da însă exact funcţia z, ci nişte valori definite printr-o funcţie de forma $y=f(x)+\varepsilon(x)$, unde am însemnat prin $\varepsilon(x)$ erorile întîmplătoare de măsurare, inevitabile într-o astfel de operaţie practică.

Din măsurare rezultă aşadar o funcţie

$$z(x)=y(x)-\varepsilon(x),$$

a cărei extindere este dată de „legea de distribuţie" a erorilor întîmplătoare. Prin urmare, pentru o anumită valoare a lui x nu rezultă numai valoarea funcţiei $y(x)$ măsurată, ci un întreg domeniu de valori posibile, pentru care va corespunde o anumită probabilitate calculabilă din legea de distribuţie considerată pentru erorile întîmplătoare. Una dintre aceste valori va fi cea mai probabilă, iar celelalte, care se abat de la ea cu mărimea $\pm\varepsilon$, sînt cu atît mai puţin probabile, cu cît $|\varepsilon|$ este mai mare; această probabilitate tinde cu atît mai repede spre zero, cu cît sînt mai precise măsurătorile, deci cu cît este mai mică eroarea medie pătratică.

Prin urmare, noţiunea de variabilă aleatorie este specifică studiului fenomenelor colective, distinctă de noţiunea de variabilă analitică. Această din urmă este susceptibilă de toate valorile din domeniul de existenţă ales, valori pe care i le putem atribui arbitrar, în timp ce o variabilă aleatorie este definită numai printr-un şir discontinuu sau continuu de valori scoase din experienţă, deci după ce cunoaştem aceste valori deduse printr-un proces de măsu-

Scanned with OKEN Scanner

rare. Putem spune că variabila analitică este o noțiune *a priori*, pe cînd variabila statistică este o noțiune *a posteriori*.

§ 74. Noțiunea de frecvență a unui eveniment dat

Numim frecvență a unui eveniment dat A, într-un complex de condiții (E), raportul dintre numărul k de realizări ale fenomenului A (cazurile reușite) și numărul total n de probe (totalitatea cazurilor posibile):

$$f_{k,n}=\frac{k}{n}. \tag{49}$$

Dacă din rezultatul unor numeroase măsurători asupra unui fenomen A se constată că frecvența lui se comportă suficient de regulat și oscilează aproape tot timpul în jurul unei valori constante oarecare — în general necunoscută — spunem că evenimentul posedă o probabilitate de realizare. Găsirea valorii acestei probabilități este o altă problemă (ceea ce am numit mai înainte „problema inversă").

Astfel definită, probabilitatea este o noțiune care păstrează un sens obiectiv, independent de subiectul conștient al probabilității. Faptul că se pot trage concluzii asupra existenței sau inexistenței probabilității unui eveniment numai după un șir de măsurători *(a posteriori)* este în concordanță cu condiția ca legea de probabilitate pe care căutăm să o descoperim să fie un rezultat al experienței.

Vom constata mai tîrziu că noțiunea de frecvență are o mare importanță și fundamente profunde în *teorema lui Bernoulli*, care determină legătura matematică dintre frecvență și probabilitate.

Pentru moment, observăm că probabilitatea are un sens definit numai în legătură cu o succesiune indefinită de alegeri arbitrare; se poate spune că probabilitatea reprezintă valoarea de acumulare a frecvenței.

§ 75. Valori medii în cazul distribuțiilor discrete

Să considerăm o variabilă aleatorie x, susceptibilă de a lua valorile șirului discret

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{50}$$

cu probabilitățile

$$p_1, p_2, \cdots, p_n, \tag{51}$$

Scanned with OKEN Scanner

sub condiția

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 . \tag{52}$$

Expresia (unde s înseamnă un număr întreg)

$$M(x^s) = p_1 x_1^s + p_2 x_2^s + \cdots + p_n x_n^s \tag{53}$$

reprezintă media puterilor de ordinul s ale variabilei x, expresie numită obișnuit *moment de ordinul s* (denumire luată din mecanică). În aplicații, valoarea medie (53) se înlocuiește prin rădăcina de indice respectiv

$$M_s = \sqrt[s]{M(x^s)} , \tag{54}$$

care se numește *valoare medie de ordinul s.*

Cazuri particulare importante, întîlnite în teoria erorilor expusă în cap. I

1. $s=1$. Avem

$$M_1 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n , \tag{55}$$

adică media aritmetică a valorilor șirului (50), cu ponderile (51), sub condiția (52).

2. $s=2$. Avem

$$M_2 = \sqrt{p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \cdots + p_n x_n^2} , \tag{56}$$

care constituie valoarea medie pătratică sub condiția ca $M_1=0$, ceea ce se poate realiza întotdeauna, cum a fost cazul în teoria erorilor reale.

3. Aplicăm logaritmii expresiei (54) și luăm $s=0$; obținem

$$\lim_{s=0} \log M_s = \lim_{s=0} \frac{1}{s} \log (p_1 x_1^s + p_2 x_2^s + \cdots + p_n x_n^s) = \lim_{s=0} \frac{\log 1}{s} ,$$

care ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$. Aplicăm regula lui L'Hôpital, derivînd în raport cu s

$$\lim_{s=0} \log M_s = \lim_{s=0} \frac{p_1 x_1^s \log x_1 + p_2 x_2^s \log x_2 + \cdots + p_n x_n^s \log x_n}{p_1 x_1^s + p_2 x_2^s + \cdots + p_n x_n^s} ,$$

căci am pus $x_i = e^{\log x_i}$. Rezultă, făcînd $s=0$ în expresia precedentă

$$\lim_{s=0} \log M_s = \frac{p_1 \log x_1 + p_2 \log x_2 + \cdots + p_n \log x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = \log x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n} ,$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, trecînd de la logaritm la număr

$$M_0 = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_{nn}^{p}, \tag{57}$$

expresie care se numeşte *medie geometrică.*

§ 76. Cîteva proprietăţi ale momentelor

Teorema 1. Dacă însemnăm prin A cea mai mică şi prin B cea mai mare dintre valorile $x_1^s, x_2^s, \cdots, x_n^s$, oricare ar fi întregul s, avem

$$A \leqslant M(x^s) \leqslant B. \tag{58}$$

Demonstraţia este imediată. Într-adevăr, înlocuind în

$$M(x^s) = p_1 x_1^s + p_2 x_2^s + \cdots + p_n x_n^s \tag{59}$$

toate valorile x_i^s prin valoarea mai mică sau cel mult egală cu ele, A, avem:

$$M(x^s) = p_1 x_1^s + p_2 x_2^s + \cdots + p_n x_n^s \geqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) A = A.$$

Analog, înlocuind în (59) toate valorile x_i^s prin valoarea B mai mare sau cel puţin egală cu ele, avem:

$$M(x^s) \leqslant (p_1 + p_2 + \cdots + p_n) B = B.$$

Teorema este demonstrată. Această teoremă justifică denumirea de valoare medie dată expresiei (59).

Teorema 2. Dacă însemnăm prin A' şi B' cea mai mică, respectiv cea mai mare, dintre valorile absolute ale mărimilor $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$, avem, oricare ar fi numărul întreg s

$$A' \leqslant M_s \leqslant B', \tag{60}$$

unde am considerat expresia (54) în care luăm valori pozitive pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$M_s = \sqrt[s]{p_1 x_1^s + p_2 x_2^s + \cdots + p_n x_n^s}. \tag{61}$$

Demonstraţia decurge întocmai ca şi pentru teorema 1.

Teorema 3. Oricare ar fi numerele s şi s' care satisfac inegalităţile $s' > s$, avem întotdeauna $M_{s'} > M_s$, pentru toate valorile pozitive date lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

În cazul particular $s' = 1$, $s = 0$, inegalitatea $M_1 \geqslant M_0$ exprimă proprietatea că media aritmetică a mai multor mărimi pozitive este

mai mare decît media geometrică [unde pentru M_0 luăm expresia dată de (57)], ceea ce se poate demonstra direct, pornind de la relaţia

$$\sqrt{a\,b}<\frac{1}{2}(a+b)\,,$$

unde a şi b sînt pozitivi, prin trecere la un număr oarecare de termeni.

Cazul particular $s'=2$, $s=1$ ne conduce la inegalitatea $M_2\geqslant M_1$, care este o consecinţă a cunoscutei identităţi a lui Lagrange

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2=\sum_{i,\,j=1}^{n}(a_i b_j-a_j b_i)^2, \qquad (62)$$

în care se pune

$$a_1=\sqrt{p_1},\ a_2=\sqrt{p_2},\ \cdots,\ a_n=\sqrt{p_n}$$

$$b_1=x_1\sqrt{p_1},\ b_2=x_2\sqrt{p_2},\ \cdots,\ b_n=x_n\sqrt{p_n},$$

ceea ce ne dă

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right)^2=\sum_{i,\,j=1}^{n}p_i p_j (x_i-x_j)^2.$$

Dar cum $\sum p_i=1$, iar probabilităţile sînt totdeauna mărimi pozitive, membrul al doilea al egalităţii precedente este totdeauna pozitiv sau nul (pentru toţi $x_i=x_j$, ceea ce este un caz particular), astfel încît putem scrie

$$\sum_{i=1}^{n}p_i x_i^2\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\right)^2;$$

aşadar

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(p_i x_i^2)}\geqslant\sum_{i=1}^{n}p_i x_i\,,$$

unde am luat semnul plus deoarece valorile din membrul al doilea sînt pozitive.

Teorema se demonstrează şi în cazul general ($s'>s$ oarecare), folosind inegalitatea

$$f\left(\frac{p_1 x_1+p_2 x_2+\cdots p_n x_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1 f(x_1)+p_2 f(x_2)+\cdots+p_n f(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\,, \qquad (63)$$

unde $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$; $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ sînt mărimi *pozitive*, iar $f(x)$ este o funcţie *convexă* şi regulată pentru $x>0$, într-un interval

$$0\leqslant a\leqslant x\leqslant b\,.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se numeşte funcţie convexă într-un interval dat al variabilei x, funcţia pentru care are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2}\{f(x')+f(x'')\}\geqslant f\left(\frac{x'+x''}{2}\right), \tag{64}$$

dacă x' şi x'' sînt două valori ale lui x cuprinse în intervalul considerat. Grafic, o funcţie convexă se prezintă sub forma din fig. 10.

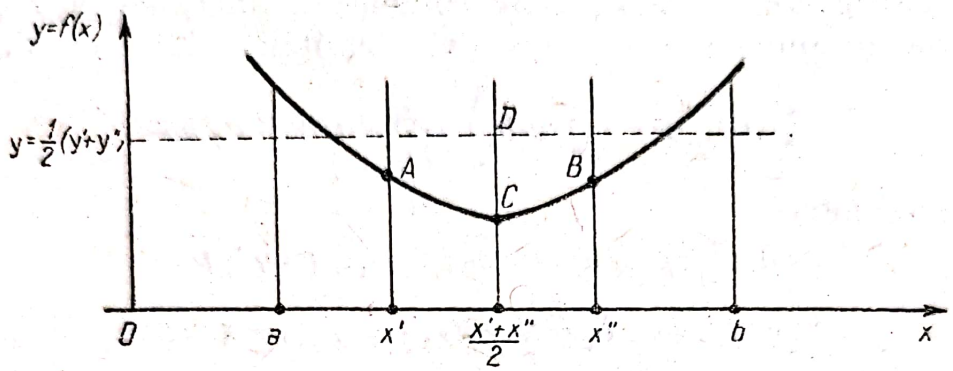


Fig. 10.

Condiţia (64) ne spune că punctul D de ordonată $\frac{1}{2}(y'+y'')$ şi abscisă $\frac{1}{2}(x'+x'')$ se află deasupra punctului C de ordonată $y=f\left(\frac{x'+x''}{2}\right)$ şi abscisă $\frac{1}{2}(x'+x'')$; adică D se află în concavitatea curbei, în intervalul (a, b).

În aceste condiţii, inegalitatea (63) ne spune că, dacă în punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ de pe curbă, care corespund absciselor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, am aşeza mase materiale de valori respectiv $p_1, p_2, \ldots, p_n$, atunci, din cauza convexităţii curbei $y=f(x)$, centrul de greutate al maselor considerate se va găsi deasupra (în concavitatea) curbei considerate. În adevăr, coordonatele centrului de greutate al acestor mase este, după cum am amintit şi în prima parte a acestei expuneri (teoria erorilor),

$$x_G=\frac{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

$$y_G=\frac{p_1y_1+p_2y_2+\cdots+p_ny_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}=\frac{p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+p_2+\cdots+p_n}. \tag{65}$$

Prin urmare, pentru curba noastră convexă avem

$$y_G\geqslant f(x_G),$$

ceea ce exprimă tocmai inegalitatea (63).

Pentru demonstrație, aplicăm inegalitatea (63), luînd $f(x)=x^r$, unde $r>0$

$$\left(\frac{p_1 x_1+p_2 x_2+\cdots+p_n x_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^r \leqslant \frac{p_1 x_1^r+p_2 x_2^r+\cdots+p_n x_n^r}{p_1+p_2+\cdots+p_n}. \qquad (66)$$

Această inegalitate are loc și dacă în locul numerelor pozitive x_i, presupuse oarecare, am lua numerele $x_1^s, x_2^s, \cdots, x_n^s$, unde s pot fi întregi pozitivi sau negativi; din (66) obținem

$$\left(\frac{p_1 x_1^s+p_2 x_2^s+\cdots+p_n x_n^s}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^s \leqslant \frac{p_1 x_1^{sr}+p_2 x_2^{sr}+\cdots+p_n x_n^{sr}}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

de unde, ținînd seama că $\sum p_i=1$ și ridicînd la puterea $\frac{1}{rs}$, pentru $s>0$, *deci* $s'=rs>s>0$, obținem $M_{s'}\geqslant M_s$, ceea ce trebuia demonstrat. De asemenea, pentru $s<s'<0$, ridicăm la puterea $-\frac{1}{rs}$, ceea ce ne dă $M_s\geqslant M_{-rs}$, sau punînd $-s=u'$, $-rs=u$, rezultă $M_{u'}\geqslant M_u$ pentru $u<u'<0$, ceea ce trebuia demonstrat.

Prin aceasta, teorema este demonstrată în toate cazurile.

§ 77. Noțiunea de „speranță matematică"

Momentul de ordinul întîi poartă și numele de „speranță matematică". Presupunem deci că avem o variabilă aleatorie x de distribuție *discretă*

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$
$$p_1, p_2, \cdots, p_n.$$

Numim speranță matematică $E(x)$ a variabilei x, expresia

$$E(x)=p_1 x_1+p_2 x_2+\cdots+p_n x_n. \qquad (67)$$

Proprietăți. 1. $E(a)=a$; speranța matematică a unei constante este egală cu însăși constanta, deoarece pentru $x_1=x_2=\ldots,=x_n=a$, avem:

$$E(a)=(p_1+p_2+\cdots+p_n)a=a.$$

2. $E(ax)=aE(x)$, unde a este o constantă, deoarece în membrul al doilea al expresiei (67) constanta a poate fi scoasă în factor.

3. $E(x\pm y)=E(x)\pm E(y)$, dacă variabilele aleatorii x și y sînt independente (probabilitatea realizării uneia dintre ele nu depinde de valoarea pe care o ia cealaltă).

Scanned with OKEN Scanner

În adevăr, fie distribuţiile

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \cdots, & x_n \\ p_1, & p_2, & \cdots, & p_n \end{matrix} \quad \sum_1^n p_i = 1; \quad \text{şi} \quad \begin{matrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_m \\ q_1, & q_2, & \cdots, & q_m \end{matrix} \quad \sum_1^m q_i = 1.$$

Probabilitatea realizării simultane a lui x_i şi y_j este evident $p_i q_j$, astfel încît, după definiţia (67), avem

$$E(x \pm y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (x_i \pm y_j)\, p_i q_j = \sum_{j=1}^{m} q_j \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \pm \sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} q_j y_j =$$
$$= E(x) \pm E(y),$$

ceea ce trebuia demonstrat.

4. $E(xy) = E(x) \cdot E(y)$. În adevăr, produsul $x_i y_j$ are valorile

$$x_1 y_1, \; x_1 y_2, \cdots, x_1 y_m; \; x_2 y_1, \; x_2 y_2, \cdots, x_2 y_m; \cdots;$$
$$x_n y_1, \; x_n y_2, \cdots, x_n y_m;$$

cu probabilităţile respective

$$p_1 q_1, \; p_1 q_2, \cdots, p_1 q_m; \; p_2 q_1, \; p_2 q_2, \cdots, p_2 q_m; \cdots,$$
$$p_n q_1, \; p_n q_2, \cdots, p_n q_m.$$

Aşadar, după definiţia (67) avem

$$E(xy) = \sum_{i\,j} p_i q_j x_i y_j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \cdot \sum_{j=1}^{m} q_j y_j = E(x) \cdot E(y).$$

§ 78. Speranţă matematică condiţionată

Dacă în locul probabilităţilor simple $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ale variabilei aleatorii luăm probabilităţile valorilor variabilei sub ipoteza realizării simultane a unor anumite *condiţii*, probabilităţi pe care le însemnăm prin $p_1', p_2', \cdots, p_n'$ şi pe care le numim *probabilităţi condiţionate*, obţinem speranţa matematică condiţionată

$$E'(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i' x_i. \tag{68}$$

Fie $p_1'', p_2'', \cdots, p_n''$ probabilităţile realizării aceloraşi valori în cazul realizării condiţiei date şi

$$E''(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i'' x_i \tag{69}$$

speranţa matematică respectivă.

Scanned with OKEN Scanner

Fie P probabilitatea realizării condiției date și $Q=1-P$ probabilitatea nerealizării acestei condiții. Atunci, pentru orice valoare i are loc egalitatea

$$p_i = Pp_i' + Q p_i'', \tag{70}$$

deoarece probabilitatea totală a realizării valorii x_i a variabilei x este egală cu suma probabilității obținerii acestei valori o dată cu realizarea simultană a condiției date și a probabilității obținerii ei fără realizarea acestei condiții (teorema probabilităților totale).

Din definiția speranței matematice obținem, după (70)

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = P \sum_{i=1}^{n} p_i' x_i + Q \sum_{i=1}^{n} p_i'' x_i = PE'(x) + QE''(x), \tag{71}$$

adică speranța matematică condiționată este egală cu suma produselor probabilității realizării și nerealizării condiției, prin speranțele matematice corespunzătoare.

Exemplu. Condiția constă în faptul ca variabila să nu depășească o anumită valoare dată A. Fie P probabilitatea acestui eveniment și $Q=1-P$ probabilitatea evenimentului contrar. După teorema de mai sus, avem

$$E(x) = PE'(x) + QE''(x),$$

unde $E'(x)$ este speranța matematică a lui x, cu condiția $x \leqslant A$,
$E''(x)$ — speranța matematică a lui x, cu condiția $x \geqslant A$.

Cazul unui număr oarecare (finit) de condiții A, B, ..., care se exclud mutual și dintre care să aibă loc cel puțin una.

Fie $E_A(x)$, $E_B(x)$, ... speranțele matematice corespunzătoare și $P_A, P_B, \ldots$ probabilitățile numitelor condiții. Speranța matematică condiționată, totală, este

$$E(x) = P_A E_A(x) + P_B E_B(x) + \cdots \tag{72}$$

Putem spune că speranța matematică totală devine ea însăși variabilă aleatorie, cu valorile $E_A(x)$, $E_B(x)$, ... și probabilitățile P_A, P_B, ...

Aplicație. Speranța matematică a unui produs xy. Condiția A exprimă egalitatea uneia dintre variabile, de exemplu y, cu prima dintre valorile sale y_1; condiția B exprimă egalitatea variabilei y cu valoarea sa y_2 etc.

Să examinăm produsul xy. Dacă s-a realizat condiția $A(y=y_1)$, speranța matematică este

$$E_A(xy) = E_A(xy_1) = y_1 E_A(x). \tag{73}$$

Dacă s-a realizat condiția $B(y=y_2)$, speranța matematică este

$$E_B(xy) = E_B(xy_2) = y_2 E_B(x). \tag{74}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (73) și (74) rezultă, după (72)

$$E(xy)=P_A E_A(xy)+P_B E_B(xy)=y_1 P_A E_A(x)+y_2 P_B E_B(x). \qquad (75)$$

Deci speranța matematică a produsului a două variabile aleatorii este egală cu suma produselor dintre valoarea uneia dintre variabile prin probabilitatea respectivă și prin speranța matematică condiționată respectivă a celei de-a doua variabile.

Generalizînd, putem scrie

$$E(xy)=P_A y_1 E_A(x)+P_B y_2 E_B(x)+\cdots \qquad (76)$$

Sau, dacă variabilele sînt independente, $E_A(x)=E_B(x)=\ldots=E(x)$, rezultă

$$E(xy)=(y_1 P_A+y_2 P_B+\cdots)E(x)=E(y)\cdot E(x),$$

rezultat cunoscut.

§ 79. Funcția caracteristică

Una dintre metodele fertile în studiul proprietăților distribuțiilor discrete și continue constă în introducerea așa-numitei *funcții caracteristice*.

Unei variabile aleatorii X, ale cărei xalori sînt $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cu probabilitățile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, i se asociază o funcție cu valori complexe, dar de variabilă reală t, obținută ca valoare medie a variabilei e^{itx} (unde $i=\sqrt{-1}$), care este funcția caracteristică

$$\varphi(t)=\sum_k p_k\, e^{itxk}; \qquad \varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)\, e^{itx}\,dx,$$

în cazul variabilei discrete; în cazul variabilei continue cu densitatea $\rho(x)$.

Exemple. 1. Variabila lui Poisson X ia numai valorile $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2, \ldots, x_n=n$, cu probabilitățile

$$p_0=e^{-a},\ p_1=e^{-a}\frac{a}{1!},\ p_2=e^{-a}\frac{a^2}{2!},\ \cdots,\ p_n=e^{-a}\frac{a^n}{r!}.$$

Rezultă

$$\varphi(t)=e^{-a}\sum\frac{a^n}{n!}e^{itx};$$

deci

$$\varphi(t)=e^{a}\left(e^{it}-1\right).$$

2. Variabila lui Gauss X ne dă

$$\varphi(t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\,e^{-h^2x^2}\,dx,$$

deci

$$\varphi(t)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{4h^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(hx-\frac{i}{2h}t\right)^2}dx.$$

Dar, din faptul că

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(hx-\frac{i}{2h}t\right)^2}dx=1,$$

urmează

$$\varphi(t)=e^{-\frac{t^2}{4h^2}}.$$

Determinarea funcției de distribuție se poate face cînd se cunoaște densitatea distribuției $\rho(x)$, exprimată cu ajutorul funcției caracteristice prin formula

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)\,dt.$$

Asupra proprietăților și aplicațiilor funcției caracteristice se pot consulta publicațiile de specialitate.

§ 80. Abatere în sens probabilist. Abatere redusă

Prin definiție, se numește *abatere* în sens probabilist diferența

$$\omega=k-np. \tag{77}$$

Dacă n este un număr întreg, abaterea ω reprezintă diferența dintre numărul k al evenimentelor favorabile și numărul cel mai probabil de astfel de evenimente.

Numim abatere probabilistă *relativă* diferența dintre frecvența și probabilitatea evenimentului considerat

$$\frac{\omega}{n}=\frac{k}{n}-p. \tag{78}$$

Numim *abatere redusă* mărimea

$$\alpha=\frac{\omega}{\sqrt{2npq}}=\frac{k-np}{\sqrt{2npq}}, \tag{79}$$

denumire justificată prin faptul că, dacă se ia ca *unitate de abatere*

$$u=\sqrt{2npq}, \tag{80}$$

ar urma $\alpha=1$.

Introducînd expresia (79) în formula (45), obținem

$$P_k=\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\alpha^2}, \tag{81}$$

Scanned with OKEN Scanner

căci după (37) am notat

$$t\sqrt{n}=k-np. \tag{37}$$

Să considerăm acum două valori ale lui k, anume k_1 și k_2, care diferă între ele numai prin cîteva unități. Este de așteptat ca valorile abaterii reduse să nu difere prea mult între ele pentru două valori ale lui k. În adevăr, fie

$$\alpha_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{2npq}}, \quad \alpha_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{2npq}}.$$

Să exprimăm probabilitatea ca numărul k să ia una dintre valorile

$$k_1,\ k_1+1,\ k_1+2,\ \cdots,\ k_2-1.$$

Admițînd că α_1 nu diferă prea mult de α_2, deci că și k_1 nu diferă prea mult de k_2, atunci pentru un n suficient de mare, probabilitatea căutată se exprimă prin formula

$$P=\frac{k_2-k_1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\alpha^2}=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2}. \tag{82}$$

Exemplu numeric care justifică considerațiile precedente.
Luăm

$$n=200,\ k_1=105,\ k_2=107.$$

Se cere probabilitatea ca din 200 procese să se realizeze evenimentul favorabil A de 105 ori, sau de 106 ori, deci între 105 și 107 ori.
Avem

$$\sqrt{2npq}=\sqrt{2\cdot 200\cdot\frac{105}{290}\cdot\frac{95}{200}}\approx 10;$$

$$\alpha_1=0{,}5,\quad \alpha_2=0{,}7.\quad \alpha_1^2=0{,}25,\quad \alpha_2^2=0{,}49;$$

luăm exponentul $\alpha^2=0{,}3$. Avem

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-0{,}3}=0{,}42.$$

Rezultă

$$P=\frac{\alpha_2-\alpha_1}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2}=0{,}2\cdot 0{,}42=0{,}084.$$

Cazul variabilei continue. Dacă n este foarte mare, valorile lui α, care variază prin valori discrete multiple de diferență

$$\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2npq}}, \tag{83}$$

Scanned with OKEN Scanner

pot fi considerate ca formînd un şir continuu. În această ipoteză, putem scrie că probabilitatea totală ca variabila α să fie cuprinsă într-un interval finit $(-\tau, +\tau$, este după (82) şi (83)

$$P(-\tau \leqslant \alpha \leqslant +\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\tau}^{+\tau} e^{-\alpha^2} d\alpha , \tag{84}$$

astfel, încît, pentru $\tau = \infty$, avem

$$P(-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1 , \tag{85}$$

ceea ce exprimă faptul că variabila reală continuă α are cu siguranţă o valoare cuprinsă undeva în intervalul numerelor reale $(-\infty, +\infty)$.

Calculul integralei (85) se efectuează după cum urmează. Punem

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx ,$$

ceea ce mai putem scrie

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy ,$$

căci, evident, valoarea integralei definite I nu depinde de modul cum exprimăm variabila independentă. Înmulţind cele două integrale precedente obţinem

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{-\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\, dy .$$

Calculul se face uşor folosind o transformare în coordonate polare în plan

$$x = r \cos\theta , \quad y = r \sin\theta , \quad dx\, dy = r\, dr\, d\theta .$$

Obţinem, alegînd limitele de integrare astfel încît să cuprindă tot planul $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi , \ 0 \leqslant r \leqslant +\infty)$

$$I^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r\, e^{-r^2} dr = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \left| -\frac{e^{-r^2}}{2} \right|_0^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta = 1 .$$

Rezultă $P = 1$, ceea ce trebuia demonstrat.

Scanned with OKEN Scanner

Revenim la formula (85) care exprimă siguranța că variabila posedă o valoare care se găsește în intervalul valorilor reale, considerînd că α este o variabilă continuă. De fapt, însă, în teoria noastră am pornit de la valori discrete

$$\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2npq}}, \tag{86}$$

unde ω poate varia în intervalul $(-np, +nq)$, ceea ce face ca α să fie cuprinsă în intervalul

$$-\sqrt{\frac{np}{2q}} \leqslant \alpha \leqslant +\sqrt{\frac{nq}{2p}}.$$

și nu în intervalul $(-\infty, +\infty)$.

Observăm însă că, pentru un α suficient de mare, $e^{-\alpha^2}$ devine neglijabil cînd α tinde către valori de ordinul lui $\sqrt{n}$, unde n este suficient de mare.

În adevăr, numeric, această afirmație se verifică ușor. Fie

$$\frac{np}{2q} = 100, \quad e^{-\frac{np}{2q}} = e^{-100} < 10^{-43} \ll 1.$$

Prin urmare, nu se comite o eroare nepermisă dacă se ia ca interval de integrare $(-\infty, +\infty)$, probabilitatea totală obținută fiind egală cu 1, în toate cazurile. Acest rezultat se explică prin faptul că expresia (85) are valoarea 1, independent de valoarea lui n, care nu figurează în expresia (85), eroarea comisă fiind oricît de mică voim, dacă luăm pe n suficient de mare.

§ 81. Funcția $\theta(\alpha)$

Studiul funcției exponențiale care apare în expresia probabilității (84) este deosebit de important, după cum vom vedea mai tîrziu, căci ea ne conduce la legea erorilor dată de Gauss.

Fie $\theta(\alpha)$ probabilitatea ca abaterea redusă să fie cuprinsă în intervalul $(-\alpha, +\alpha)$; vom pune după (84)

$$P(-\alpha \leqslant x \leqslant +\alpha) \equiv \theta(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-x^2} dx, \tag{87}$$

luînd pe x ca variabilă aleatorie. Expresia precedentă se mai poate scrie

$$\theta(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{+\alpha} e^{-x^2} dx, \tag{88}$$

deoarece funcția de sub semnul integrală este pară.

Valorile funcției $\theta(\alpha)$ se găsesc în tabele speciale. Redăm o parte dintr-o astfel de tabelă, care ne arată rapiditatea creșterii lui $\theta(\alpha)$ către valoarea limită 1, pentru un α, suficient de mare, dar care practic nu este nevoie să depășească valoarea 4, după cum reiese din tabelă.

α	$\theta(\alpha)$	α	$\theta(\alpha)$
0,1	0,1125	1,1	0,8802
0,2	0,2227	1,163	0,9
0,3	0,3286	1,5	0,9661
0,4	0,4284	1,821	0,99
0,4769	0,5	2,0	0,9953
0,5	0,5205	2,327	0,999
0,6	0,6039	2,751	0,9999
0,7	0,6778	3,0	0,999979
0,8	0,7421	3,123	0,99999
0,9	0,7969	3,46	0,999999
1,0	0,8427	3,763	0,9999999
		4,0	0,999999985

Aplicație numerică. Dacă într-o sală de maternitate au loc, într-un interval de timp nu prea lung, 200 nașteri, se pune întrebarea: care este probabilitatea ca să fie născuți mai puțin decît 90 băieți?

Avem $n=200$; $p=q=\frac{1}{2}$ (băiat, ori fată); $h=10$; $\alpha=1$.

Probabilitatea ca abaterea redusă să nu fie mai mare decît unitatea este după tabelă, $1-\theta(1)=0{,}1573$. Observăm însă că această probabilitate este calculată numai într-un sens (mai puțin de 90 băieți sau fete); dar noi vrem probabilitatea ca să fie născuți mai puțin de 90 băieți, nu fete. Va trebui deci să împărțim prin 2 valoarea precedentă. Probabilitatea este deci: $0{,}1573 : 2 \approx 1/13$.

§ 82. Valori medii în cazul variabilei continue

În § 75 am introdus noțiunea de valoare medie și am arătat proprietățile valorilor medii pentru distribuții discrete de evenimente, respectiv, de valori. Trecerea la cazul distribuției continue, adică la cazul în care variabila considerată poate lua un șir continuu de valori conținute într-un domeniu dat, se execută după cum am arătat la § 80; de unde rezultă că

$$\varphi(x)\,dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}dx \qquad (89)$$

reprezintă probabilitatea ca variabila considerată să aibă valori cuprinse în intervalul $(x,\ x+dx)$.

Ca și în cazul variabilei discrete, definim valoarea medie a unei funcții $f(x)$, continuă și mărginită în intervalul considerat $(-\xi, +\xi)$, prin integrala

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\xi}^{+\xi} f(x)\, e^{-x^2}dx.$$

Avînd însă în vedere considerațiile de la § 80 și faptul că funcția $f(x)$ este presupusă mărginită în intervalul dat, putem scrie

$$\int_{-\xi}^{+\xi} f(x)\, e^{-x^2}dx \leqslant M \cdot \int_{-\xi}^{+\xi} e^{-x^2}dx,$$

unde M este maximul lui $f(x)$ în acest interval. Dar atunci, după § 80, putem extinde limitele între $(-\infty, +\infty)$. Așadar, valoarea medie a funcției $f(x)$, continuă și mărginită în intervalul $(-\xi, +\xi)$, poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{M}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-x^2}dx. \tag{90}$$

Cazuri particulare:

$$\mathcal{M}(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} 1 \cdot e^{-x^2}dx = 1 \tag{90a}$$

$$\mathcal{M}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2}dx = 0 \tag{90b}$$

$$\mathcal{M}(|x|) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} |x| e^{-x^2}dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty} x\, e^{-x^2}dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tag{90c}$$

$$\mathcal{M}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{1}{2} \tag{90d}$$

$$\mathcal{M}(x^n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx = I_n, \tag{90e}$$

Scanned with OKEN Scanner

valoarea care se calculează cu ajutorul următoarei formule de recurență

$$I_n = \frac{n-1}{2} I_{n-2}, \tag{91}$$

care se deduce precum urmează. Din egalitatea

$$\frac{d}{dx}(x^{n-1} e^{-x^2}) = (n-1)\, x^{n-2} e^{-x^2} - 2 x^n e^{-x^2},$$

prin integrare între $(-\infty, +\infty)$, obținem

$$(n-1)\, I_{n-2} - 2 I_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left| x^{n-1} e^{-x^2} \right|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

ceea ce ne dă relația (91), prin care se deduc toate cazurile particulare de mai sus.

§ 83. Abatere probabilă. Abatere mediană. Abatere medie pătratică

Dacă pentru variabila x luăm mărimea pe care am definit-o drept abatere redusă α (§ 80), definim *abaterea probabilă* drept media valorilor absolute ale variabilei $|x|$, așa cum am procedat și în teoria erorilor, unde am definit abaterea prin eroarea în valoare absolută. În aceste condiții, *abaterea redusă probabilă* este dată de expresia (90 c)

$$\mathcal{M}(|x|) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = 0{,}5663, \tag{92}$$

unde, pentru a obține abaterea probabilă (neredusă), trebuie să înmulțim prin unitatea de abatere [§ 80, formula (80)]

$$u = \sqrt{2npq}. \tag{93}$$

Observăm că nu are sens să considerăm abaterea definită prin valoarea algebrică a erorii, adică să luăm media valorilor algebrice ale lui x, căci aplicînd formula (90 b), rezultă că această medie este nulă. Acest rezultat coincide cu concluzia la care am ajuns în capitolul de teoria erorilor, asupra mediei aritmetice a erorilor reale, cu semnele lor (Partea întîi, Teoria erorilor, § 5).

Mai mult, observăm că abaterea redusă probabilă coincide, după formula (92) și considerațiile de la § 79, extinse la variabile continue, cu speranța matematică pentru evenimentul realizării abaterii reduse considerate, în domeniul de variație considerat.

Scanned with OKEN Scanner

Numim *abatere redusă mediană* valoarea care are tot atîtea şanse de a fi depăşită, cîte şanse are de a nu fi depăşită de abaterea redusă α. Aceasta corespunde unei valori pentru α care satisface ecuaţia

$$\theta(\alpha_m)=\frac{1}{2}, \tag{94}$$

căci probabilitatea alternativei de a fi sau a nu fi depăşită valoarea căutată α_m este egală cu $\frac{1}{2}$. Din tabela dată la § 81 găsim

$$\alpha_m=0{,}4769, \tag{95}$$

Abaterea redusă mediană se obţine înmulţind numărul precedent cu unitatea de abatere u [formula (80)]

$$\omega_m=0{,}4769\sqrt{2npq}. \tag{95'}$$

Abaterea redusă medie pătratică. Se defineşte ca şi în cazul distribuţiei discrete (teoria erorilor de măsurare) prin rădăcina pătrată a expresiei (90 b)

$$\sqrt{M(x^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}7071, \tag{96}$$

de unde urmează că abaterea medie pătratică neredusă este

$$u\sqrt{M(x^2)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2npq}=\sqrt{npq}. \tag{96'}$$

§ 84. Inegalitatea lui P. L. Cebîşev

Să considerăm o variabilă aleatorie x, care poate să ia şirul de valori discrete

$$x_1, x_2, \cdots x_n, \tag{97}$$

cu probabilităţile respective

$$p_1, p_2, \cdots p_n, \tag{98}$$

astfel încît

$$\sum_{i=1}^{n} p_1=1. \tag{99}$$

Să admitem că şirul (97) este ordonat după valorile absolute crescătoare ale variabilei x

$$|x_1|<|x_2|<|x_3|<\cdots<|x_n|.$$

Fie τ un număr pozitiv dat. Există, în general, un număr oarecare s de valori $|x_i|$ mai mici decît τ şi un număr $n-s$ de valori $|x_i|$ mai mari decît τ. Putem scrie deci

$$|x_1|<|x_2|<\cdots<|x_s|\leqslant\tau<|x_{s+1}|<|x_{s+2}|<\cdots<|x_n|. \quad (100)$$

Să considerăm valoarea medie pătratică a valorilor şirului (97)

$$M(x^2)=[px^2]=p_1x_1^2+p_2x_2^2+\cdots+p_sx_s^2+p_{s+1}x_{s+1}^2+\cdots+p_nx_n^2. \quad (101)$$

Să înlocuim în expresia (101) valorile $x_1, x_2, \ldots, x_s$ prin cea mai mică valoare a lor, adică prin zero, iar valorile $x_{s+1}, x_{s+2}, \cdots, x_n$ tot prin cea mai mică valoare a lor, adică prin τ, după (100); obţinem evident, întrucît expresia din membrul al doilea al lui (101) este pozitiv definită

$$M(x^2)\geqslant(p_{s+1}+p_{s+2}+\cdots+p_n)\tau^2. \quad (102)$$

Dar cum

$$p_{s+1}+p_{s+2}+\cdots+p_n=1-(p_1+p_2+\cdots+p_s)=1-\sum_{i=1}^{s}p_i,$$

putem scrie pentru (102)

$$M(x^2)\geqslant\left(1-\sum_{i=1}^{s}p_i\right)\tau^2,$$

de unde urmează

$$\frac{M(x)}{\tau^2}\geqslant1-\sum_{i=1}^{s}p_i,$$

sau, în definitiv,

$$\sum_{i=1}^{s}p_i\geqslant1-\frac{M(x^2)}{\tau^2}. \quad (103)$$

Dar $\sum_{1}^{s}p_i=p_1+p_2+\ldots+p_s$ reprezintă, după teorema probabilităţilor totale, probabilitatea ca variabila x să ia una dintre valorile $x_1, x_2, \ldots, x_s$; sau, ceea ce este tot una, $\sum_{1}^{s}p_i$ reprezintă probabilitatea de a obţine pentru x o abatere mai mică decît τ.

Să notăm această probabilitate cu P_τ. Teorema lui Cebîşev ne spune că

$$P(-\tau\leqslant x\leqslant+\tau)\geqslant1-\frac{M(x^2)}{\tau^2}. \quad (104)$$

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm acum pe $\sqrt{M(x^2)}$ drept unitate pentru valorile x_i. Aceasta înseamnă că valoarea τ se va putea scrie ca multiplu de această valoare unitate

$$\tau = t\sqrt{M(x^2)}, \tag{105}$$

ceea ce face ca (104) să se poată scrie

$$P_t \geqslant 1 - \frac{1}{t^2}. \tag{106}$$

Observînd că $M(x^2)$ nu este decît speranţa matematică a evenimentului x^2, inegalitatea (104) se mai scrie sub forma

$$P(-\tau \leqslant x \leqslant +\tau) \geqslant 1 - \frac{E(x^2)}{\tau^2}. \tag{107}$$

Inegalitatea lui Cebîşev ne spune: *dacă variabila considerată x ia valori pozitive sau negative, atunci, oricare ar fi un număr pozitiv $\tau > 0$, vom avea satisfăcute inegalităţile* (104), *respectiv* (106).

Dacă, de exemplu, în expresia (106) luăm $t=3$, ceea ce înseamnă că voim să apreciem o majorantă a probabilităţii ca o măsurătoare individuală să nu depăşească în abatere de trei ori eroarea medie pătratică, găsim $P(-3m \leqslant x - L \leqslant +3m) \geqslant \frac{8}{9}$; aşadar, o probabilitate cuprinsă între $\frac{8}{9}$ şi 1. Această eroare este însă prea aproximativă. Vom constata că, în cazul distribuţiilor normale (legea lui Gauss) probabilitatea ca o valoare individuală să iasă din intervalul $(-3m, +3m)$ este numai de aproximativ trei la mie. Această constatare face să se admită în practică valoarea $3m$ ca eroare limită tolerată, o mare parte din distribuţiile practice fiind normale.

§ 85. Teorema lui Bernoulli. Legea numerelor mari

Să considerăm n probe succesive şi fie p probabilitatea alternativei favorabile, iar q probabilitatea alternativei contrare. Fie α abaterea redusă, după formula

$$\alpha = \frac{k - np}{\sqrt{2npq}}. \tag{79}$$

Conform § 80, numărul evenimentelor favorabile este

$$k = np + \alpha\sqrt{2npq}, \tag{108}$$

iar numărul evenimentelor nefavorabile este

$$n - k = nq - \alpha\sqrt{2npq}. \tag{109}$$

Scanned with OKEN Scanner

Să considerăm diferența

$$\frac{np+\alpha\sqrt{2npq}}{nq-\alpha\sqrt{2npq}}-\frac{p}{q}. \tag{110}$$

Observăm că, pentru un α dat, diferența (110) tinde către zero cînd n tinde către infinit. În adevăr, primul termen din (110) tinde, pentru $n \to \infty$, către raportul coeficienților termenilor de gradul cel mai înalt în n, adică $\frac{p}{q}$. Avem astfel *legea numerelor mari* sub forma:

Dacă presupunem că abaterea redusă relativă rămîne mai mică decît un număr fix dat, raportul dintre numărul evenimentelor favorabile și numărul evenimentelor contrarii tinde către raportul probabilităților respective, dacă numărul probelor n crește la infinit.

Observăm că probabilitatea ca valoarea absolută a lui α să fie mai mare decît un număr N este $1-\theta(N)$, conform § 81, căci $\theta(N)$ reprezintă probabilitatea ca α să rămînă mai mic decît N

$$\theta(N)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^N e^{-\alpha^2}d\alpha. \tag{111}$$

Acestea fiind precizate, *teorema lui Bernoulli* se poate enunța sub forma

Fiind dat un număr ε oricît de mic vrem, probabilitatea ca diferența dintre raportul numărului de evenimente favorabile și numărul de evenimente contrare, care rezultă din observație (a posteriori), și raportul teoretic al probabilităților respective (a priori) $\frac{p}{q}$ să fie mai mare în valoare absolută decît ε tinde către zero cînd numărul probelor. n crește la infinit.

În adevăr, efectuînd diferența (110), putem scrie conform teoremei enunțate

$$\left|\frac{\alpha\sqrt{2pq}}{q^2\sqrt{n}-\alpha q\sqrt{2pq}}\right|>\varepsilon. \tag{112}$$

de unde rezultă

$$\alpha>\frac{\varepsilon q^2\sqrt{n}}{\sqrt{2pq}(1\pm\varepsilon q)}=N. \tag{113}$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, probabilitatea ca relația (112), respectiv (113), să fie satisfăcută, după cele spuse mai sus, este

$$1-\theta\left(\frac{\varepsilon q^2\sqrt{n}}{\sqrt{2pq(1\pm\varepsilon q)}}\right). \qquad (114)$$

Or, p și q sînt, prin definiție, numere fixe; deci, oricît de mic ar fi ε, dar totuși finit și diferit de zero, produsul $\varepsilon\sqrt{n}$ crește mereu cînd n crește, putînd depăși orice limită. În aceste condiții, θ tinde către unitate și valoarea (114) tinde către zero.

Teorema lui Bernoulli se aplică la foarte multe fenomene naturale datorite atît influenței unei cauze constante care produce o acțiune constantă dată printr-o valoare determinată, cît și influenței unui mare număr de acțiuni suplimentare care pot modifica efectul cauzei constante. Dacă presupunem că acțiunile perturbătoare produc o modificare foarte mică a valorii determinate prin cauza constantă, fie într-un sens, fie în sens contrar, valoarea cea mai probabilă a valorii determinate va fi, evident, cea datorită exclusiv cauzei constante. Abaterea între un eveniment observat și evenimentul cel mai probabil va fi dată de diferența dintre numărul modificărilor pozitive și numărul modificărilor negative. Rezultă că probabilitatea unei abateri date se calculează cu ajutorul teoremei lui Bernoulli.

Demonstrația teoremei lui Bernoulli. Dăm o altă formulare a teoremei lui Bernoulli: *Dacă efectuăm un număr mare n de probe, ne putem aștepta, cu o probabilitate apropiată de unitate, ca numărul k de realizări ale evenimentului A să fie foarte apropiat de valoarea sa, cea mai probabilă, diferind de această valoare numai cu o parte neînsemnată din numărul total n al probelor efectuate.*

Numărul cel mai probabil k diferă foarte puțin de valoarea np, unde p este probabilitatea evenimentului A, într-o singură probă.

Pentru demonstrarea teoremei lui Bernoulli este suficient să arătăm că

$$P(|k-np|>\varepsilon n)$$

va fi oricît de mică pentru valori suficient de mari ale lui n. Regula de adunare ne spune că probabilitatea ca $|k-np|>\varepsilon n$ este egală cu suma probabilităților parțiale ale tuturor probabilităților pentru care $|k-np|>\varepsilon n$, adică

$$P(|k-np|>\varepsilon n)=\sum_{|k-np|>\varepsilon n} P_n(k). \qquad (115)$$

Scanned with OKEN Scanner

Din raţionamentul lui Cebîşev se observă că

$$\left|\frac{k-np}{\varepsilon n}\right|>1 \text{ şi deci } \left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2>1 \tag{116}$$

şi că suma din membrul al doilea al relaţiei (115) se măreşte dacă se înmulţeşte fiecare termen $P_n(k)$ prin raportul de mai sus. Aşadar

$$P(|k-np|>\varepsilon n)<\sum_{|k-np|>\varepsilon n}\left(\frac{k-np}{\varepsilon n}\right)^2 P_n(k)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{|k-np|>\varepsilon n}(k-np)^2 P_n(k)<\frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 P_n(k), \tag{117}$$

deoarece în ultima sumă am adunat termenii pozitivi care lipseau în suma precedentă. Să calculăm ultima sumă

$$\sum_{k=0}^{n}(k-np)^2 P_n(k)=\sum_{k=0}^{n}k^2 P_n(k)-2np\sum_{k=0}^{n}k P_n(k)+n^2p^2\sum_{k=o}^{n}P_n(k). \tag{118}$$

Dar

$$\sum_{k=0}^{\infty}P_n(k)=1, \tag{119}$$

după regula de normare. Introducem valoarea binomială a lui $P_n(k)$ şi obţinem

$$\sum_{k=0}^{n}kP_n(k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!\,k}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!\,[(n-1)-(k-1)]!}\,p^{k-1}(1-p)^{(n-1)-(k-1)},$$

sau, punînd $k-1=l$ şi observînd că l variază de la 0 la $n-1$, avem

$$\sum_{k=1}^{n}kP_n(k)=np\sum_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{l!\,(n-1-l)!}p^l(1-p)^{n-1-l}=np\sum_{l=0}^{n-1}P_{n-1}(l).$$

Dar

$$\sum_{l=0}^{n-1}P_{n-1}(l)=1,$$

Scanned with OKEN Scanner

deoarece exprimă suma probabilităţilor unui sistem complet de evenimente. Prin urmare,

$$\sum_{k=0}^{n} k P_n(k) = np. \tag{120}$$

Pentru a calcula prima sumă din membrul al doilea al relaţiei (118), putem pune această sumă sub forma

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\ P_n(k) + \sum_{k=0}^{n} k P_n(k).$$

Aşadar,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) P_n(k) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) P_n(k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)\cdot n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(k-2)!\ [(n-2)-(k-2)]!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)} =$$

$$= n(n-1)\, p^2 \sum_{m=0}^{n=2} \frac{(n-2)!}{m!\ (n-2-m)!} p^m (1-p)^{n-2m} =$$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{m=0}^{n=2} P_{n-2}(m) = n(n-1)\, p^2. \tag{121}$$

Formulele (119), (120) şi (121) ne dau, după (118),

$$\sum_{k=0}^{n} (k-np)^2 P_n(k) = n^2p^2 + np(1-p) - 2np \cdot np + n^2p^2 = np(1-p)$$

şi prin urmare

$$P(|k-np| > \varepsilon n) < \frac{np(1-p)}{\varepsilon^2 n^2} = \frac{p(1-p)}{\varepsilon^2 n}.$$

Această inegalitate demonstrează teorema. În adevăr, putem lua un număr ε oricît de mic, dar diferit de zero. Odată ales acest număr, putem face să crească numărul de experienţe n peste orice valoare, astfel încît fracţia din membrul al doilea să tindă către zero pentru $n \to \infty$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 86. Observaţii asupra convergenţei frecvenţelor statistice

După formulele (108), (109) şi (110), teorema lui Bernoulli se poate exprima introducînd noţiunea de frecvenţă a unui eveniment dat. În adevăr, dacă considerăm un eveniment oarecare A, a cărui probabilitate de realizare este p, atunci frecvenţa f a numărului care ne arată de cîte ori s-a verificat realizarea lui A în cursul a n probe tinde „în probabilitate" către p.

Fie k numărul care ne arată de cîte ori s-a realizat evenimentul A în cele n probe consecutive. Inegalitatea

$$|f_n - p| < \varepsilon \tag{122}$$

unde ε este un număr pozitiv oricît de mic, este satisfăcută în acelaşi timp cu inegalitatea

$$|\omega| \equiv u \cdot |\alpha| = |k - np| < n\varepsilon, \tag{123}$$

după formula (79) şi (80).

Fie P_n probabilitatea realizării inegalităţii (123). După teorema lui Cebîşev, avem

$$P_n \geqslant 1 - \frac{\mathcal{M}(\omega^2)}{n^2 \varepsilon^2}, \tag{124}$$

căci $P_n = P(-n\varepsilon \leqslant \omega \leqslant +n\varepsilon)$ exprimă probabilitatea ca abaterea neredusă ω să fie mai mică, în valoare absolută, decît $n\varepsilon$, ceea ce ne spune tocmai formula (123). În relaţia (124), expresia $\mathcal{M}(\omega^2)$ este valoarea medie pătratică a variabilei care exprimă abaterea neredusă; dar după formula (96′) obţinem

$$\mathcal{M}(\omega^2) = u \cdot \mathcal{M}(\alpha^2) = \sqrt{npq}.$$

Introducînd această valoare în (124), rezultă

$$P_n \geqslant 1 - \frac{npq}{n^2 \varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{125}$$

Aşadar, pentru $n \to \infty$ vom avea $P_n \to 1$, adică probabilitatea realizării inegalităţii (122) tinde către siguranţă. Aceasta înseamnă că probabilitatea realizării inegalităţii contrarii

$$|f_n - p| > \varepsilon \tag{126}$$

tinde către zero, cînd numărul probelor n tinde către infinit, adică, practic vorbind, este suficient de mare.

Această afirmaţie este singura pe care ne-o dă teorema lui Bernoulli: este foarte puţin probabil ca frecvenţa evenimentului con-

Scanned with OKEN Scanner

siderat (care este un rezultat experimental) să depăşească probabilitatea teoretică p (mărime aprioriică).

În acest sens, noţiunea de „limită în probabilitate“ se deosebeşte de noţiunea de limită curentă în analiza matematică. Analiza matematică ne spune că şirul de frecvenţe

$$f_1, f_2, \cdots, f_n \cdots$$

este convergent şi are o limită p, dacă există o constantă p, pentru care este satisfăcută condiţia

$$\lim_{n\to\infty} f_n = p. \tag{127}$$

Relaţia (123) sau (126) ne spune mai puţin decît atît, după cum am observat mai sus.

Se pot construi exemple prin care să se verifice că în adevăr există evenimente pentru care, deşi frecvenţa fluctuează arbitrar, totuşi ea tinde către o probabilitate dată, în sensul analizei.

Pe de altă parte, Markov a construit un exemplu prin care arată că frecvenţele succesive $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ au toate aceeaşi valoare şi, deci, aceeaşi limită, neputînd fi vorba de vreo convergenţă nici în sens analitic, nici în sens probabilist.

Putem conchide că procesul de convergenţă într-un sens sau altul nu constituie o proprietate caracteristică a şirurilor statistice.

În unele aplicaţii se cere ca şirul de frecvenţe să satisfacă nu numai inegalitatea (122), ci să fie satisfăcute toate inegalităţile

$$|f_n - p| < \varepsilon, \cdots, |f_{n+k} - p| < \varepsilon, \cdots$$

Se spune că şirul de frecvenţe are o *convergenţă puternică* (Cantelli).

Trebuie reţinut faptul că teorema lui Bernoulli caută să stabilească o legătură între constatarea *a posteriori* a unei frecvenţe (de evenimente *realizate*) şi evaluarea *a priori* a unei probalilităţi (care este o operaţie aritmetică), legătură care are ca scop să ne informeze asupra evenimentului ce urmează a se realiza, eventual, dar care nu „demonstrează“ legea empirică a întîmplării şi, prin urmare, nici stabilitatea fenomenelor.

§ 87. Probabilităţile cauzelor. Teorema lui Bayes

Este bine cunoscut faptul că orice fenomen natural, orice eveniment, îşi are o cauză, sau este rezultatul unui complex de cauze. Este evident că şi o cauză anumită poate să contribuie la produ-

cerea mai multor evenimente. Una dintre problemele statisticii matematice constă în determinarea *probabilităților cauzelor.*

În problemele obișnuite ale statisticii matematice se pune următoarea întrebare: fiind dat un eveniment C *(cauză)*, care este probabilitatea ca să se realizeze evenimentul E (efectul)? Această problemă am discutat-o în considerațiile precedente.

Dar se mai poate pune problema: *s-a realizat* evenimentul E, pe care l-am determinat experimental; ne întrebăm care este probabilitatea ca el să fie produs de o anumită cauză C_s, știind că evenimentul E ar putea fi produs de mai multe cauze $C_1, C_2, \ldots, C_s, \ldots, C_n$ care se exclud mutual și pentru care cunoaștem probabilitățile *a priorice* $p_1, p_2, \ldots, p_s, \ldots, p_n$, respectiv. Ni se cere, deci, probabilitatea *a posteriori*, adică *după realizarea evenimentului* E.

Aceasta este problema *probabilităților cauzelor*, care se pune în multe chestiuni de statistică matematică. Pentru rezolvarea acestei probleme servește *teorema lui Bayes.*

Fie

$$\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$$

probabilitățile *a priori* de acțiune a cauzelor

$$C_1, C_2, \cdots, C_n$$

respectiv. Fie

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

probabilitățile *a priori* de realizare a evenimentului E sub acțiunea cauzelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$ respectiv.

Teorema lui Bayes ne spune că este posibil să se exprime, în cazul general, probabilitatea *a posteriori*, p, de realizare a evenimentului E sub acțiunea unei anumite cauze, de exemplu C_s, din șirul de mai sus.

Probabilitatea realizării evenimentului E sub acțiunea cauzei C_s se poate evalua în două moduri. Egalarea rezultatelor astfel obținute ne dă expresia care constituie teorema lui Bayes.

Probabilitatea realizării evenimentului E, știind că funcționează acțiunea cauzei C_s, este, după legea probabilităților compuse, egală cu $\pi_s p_s$, adică produsul dintre probabilitatea *a priori* de acțiune a cauzei C_s prin probabilitatea de realizare a evenimentului E sub acțiunea acestei cauze.

Pe de altă parte, să considerăm probabilitatea totală de realizare a evenimentului E sub acțiunea *uneia oarecare* dintre cauzele inde-

Scanned with OKEN Scanner

pendente ale şirului considerat. Această probabilitate este, după legea probabilităţilor totale, egală cu suma: $\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \cdots + \pi_n p_n$. Dar, după legea probabilităţilor compuse, odată asigurată realizarea evenimentului E, rămîne să înmulţim suma precedentă prin probabilitatea *a posteriori* p de intrare în acţiune a cauzei C_s. Egalarea acestor două rezultate ne dă *formula lui Bayes*

$$p = \frac{\pi_s p_s}{\pi_1 p_1 + \pi_2 p_2 + \cdots + \pi_n p_n}. \qquad (128)$$

Exemplu. Două clase au fiecare cîte 20 elevi, clasaţi precum urmează: una dintre clase are 10 elevi buni, 5 mediocri şi 5 slabi; cealaltă clasă are 5 elevi buni, 5 mediocri şi 10 slabi.

Un inspector examinează cîte un elev oarecare din cele două clase şi constată că elevul din clasa A este superior elevului din clasa B.

Care este probabilitatea ca clasa A să fie cea cu mai mulţi elevi buni?

Numărul de combinaţii în care elevul din prima clasă poate să fie mai bun este

$$10 \times 15 + 5 \times 10 = 200,$$

deoarece fiecare dintre cei 10 elevi buni din prima clasă poate fi mai bun decît cei 5 mediocri şi 10 slabi din clasa a doua; iar cei 5 elevi mediocri din prima clasă pot fi mai buni decît cei 10 slabi din clasa a doua.

Numărul de combinaţii în care cei doi elevi examinaţi pot să fie de aceeaşi categorie este

$$10 \times 5 + 5 \times 5 + 5 \times 10 = 125,$$

iar numărul de combinaţii în care elevul din clasa a doua poate fi mai bun este

$$5 \times 10 + 5 \times 5 = 75.$$

Probabilitatea *a priori* este $\frac{1}{2}$ pentru fiecare elev.

Aşadar, după teorema lui Bayes, probabilitatea ca clasa A să fie prima clasă este

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot 200}{\frac{1}{2} \cdot 200 + \frac{1}{2} \cdot 75} = \frac{8}{11}.$$

Dacă ar fi examinaţi cîte doi elevi din fiecare clasă şi ambii elevi din clasa A ar fi fost superiori celor doi din clasa B, atunci probabilitatea ca clasa A să fie prima clasă ar fi

$$\frac{\frac{1}{2}(200)^2}{\frac{1}{2}(200)^2 + \frac{1}{2}(75)^2} = \frac{8^2}{8^2 + 3^2} = \frac{64}{73}.$$

Se vede că prin repetarea probelor se măreşte probabilitatea de a se obţine o concluzie exactă.

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie observat că formula lui Bayes este valabilă numai în anumite condiții. În primul rînd, modalitățile de realizare a evenimentului E trebuie să fie independente de modalitățile de realizare a evenimentului C_s. De asemenea, cauzele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ trebuie să se excludă reciproc, spre a putea aplica teorema probabilităților totale.

Formula lui Bayes se extinde și la cazul variabilelor continue. Să admitem că variabila aleatorie poate avea o valoare cuprinsă în intervalul $(x, x+dx)$. Odată această valoare realizată, probabilitatea ca din n probe să obținem k evenimente favorabile poate fi scrisă sub forma

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} x\ (1-x)^{n-k},$$

însemnînd cu x probabilitatea unui eveniment favorabil.

Aplicarea formulei (128) ne dă pentru probabilitatea *a posteriori*

$$P = \frac{x^k (1-x)^{n-k}}{\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \cdot dx}, \qquad (129)$$

care generalizează numita formulă.

Capitolul II

Teoria probabilităților și erorile de măsurare

§ 88. Legea împrăștierii erorilor întîmplătoare

Dacă se analizează mai amănunțit procesul de măsurare pentru o mărime dată a cărei valoare adevărată poate să fie sau poate să nu fie cunoscută, mărime pe care o asimilăm unei variabile aleatorii, constatăm ușor că un astfel de proces satisface condițiile de definiție a unui proces statistic (stochastic); valorile obținute prin măsurare constituie, atunci, șirul de valori concrete ale variabilei considerate, erorile respective fiind distribuite în conformitate cu principiul erorilor întîmplătoare.

Datele experimentale ne arată că, în operațiile independente, erorile întîmplătoare se grupează în jurul valorii celei mai probabile, așezîndu-se pe o curbă în trepte pentru o distribuție discretă, sau pe o curbă continuă pentru o distribuție continuă.

Scanned with OKEN Scanner

Problema care se pune este ca, din datele experimentale și în anumite ipoteze pe care le vom specifica la timp și care au ca scop să facă posibilă găsirea unei soluții unice a problemei, să se deducă forma curbelor reprezentative ale distribuției găsite experimental.

Fie

$$y=\varphi(x) \tag{1}$$

ecuația curbei de densitate a distribuției, a cărei formă explicită nu poate fi precizată, după cum am observat mai sus, decît prin considerații privitoare la sensul fizic al acestei curbe și în baza unor anumite ipoteze impuse de natura problemei.

Să presupunem că avem un șir de valori ale variabilei conținute în intervalul $(x, x+\Delta x)$. Numărul acestor valori este, evident, proporțional cu elementul de arie definit de curbă pentru intervalul considerat

$$k=Cy\,\Delta x, \tag{2}$$

unde C este o constantă, iar y ordonata corespunzătoare valorii medii a intervalului infinitezimal Δx. Pentru totalitatea valorilor, n, avem condiția

$$n=C\sum y\,\Delta x, \tag{3}$$

unde suma se extinde asupra tuturor intervalelor. Coeficientul se determină prin *condiția de normare*

$$\sum y\,\Delta x=1, \tag{4}$$

care fixează unitatea de măsuă. Comparînd relațiile (3) și (4), găsim

$$C=n, \tag{5}$$

ceea ce ne dă pentru formula (2)

$$k=ny\,\Delta x,$$

de unde rezultă

$$\frac{k}{n}=y\,\Delta x. \tag{6}$$

Dacă interpretăm numărul k drept numărul care corespunde celei mai mari probabilități, mărimea din membrul întîi al relației (6) definește frecvența de cădere a valorilor în intervalul de întindere Δx. Pentru un număr suficient de mare n de măsurători și avînd în vedere ipoteza de independență a valorilor care corespund, de exemplu, erorilor întîmplătoare. putem aplica teorema lui Bernoulli, a numerelor mari. Prin urmare, putem scrie că, pentru un număr

Scanned with OKEN Scanner

n suficient de mare, probabilitatea apariției unei valori (erori) în intervalul $(x, x+|\Delta x)$ este

$$P=y\,\Delta x, \tag{7}$$

sau, după (1) și luînd un interval infinitezimal, probabilitatea respectivă este

$$P(x_i \leqslant x \leqslant x_i+dx_i)=\varphi(x)\,dx, \tag{8}$$

iar probabilitatea ca o valoare a variabilei să fie cuprinsă într-un interval finit (x_1, x_2) este

$$P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx, \tag{9}$$

sub condiția de normare, care exprimă siguranța existenței unei valori în intervalul tuturor numerelor reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,dx=1. \tag{10}$$

Problema care se pune este, deci, determinarea expresiei funcției $\varphi(x)$.

§ 89. Legea distribuției normale, după Gauss

În scopul determinării funcției de densitate $\varphi(x)$, Gauss face ipoteza că valorile experimentale se grupează în jurul valorii mediei aritmetice, care este cea mai probabilă

$$\xi=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \tag{11}$$

presupunînd că determinările $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pentru variabila considerată x, sînt *independente* între ele și că sînt de egală precizie. Extinderea la cazul distribuției valorilor de *inegală* precizie o vom face mai tîrziu, metoda lui Gauss fiind valabilă și în acest caz.

Analitic, aceasta înseamnă că funcția de densitate admite un maxim pentru $x=\xi$. Fie, așadar,

$$\varphi(x_1-x),\ \varphi(x_2-x),\ \cdots,\ \varphi(x_n-x),$$

funcțiile de densitate corespunzătoare probabilităților ca variabila să aibă o valoare cuprinsă, respectiv, în intervalele

$$(x_1,\ x_1+dx_1);\ (x_2,\ x_2+dx_2);\ \cdots;\ (x_n,\ x_n+dx_n).$$

Scanned with OKEN Scanner

În virtutea legii probabilităţilor compuse, probabilitatea ca variabila să aibă o valoare cuprinsă într-un interval oarecare (x_i, x_i+dx_i) este proporţională cu produsul

$$\varphi(x_1-x)\cdot\varphi(x_2-x)\cdots\varphi(x_n-x).$$

Dar cum, după ipoteza lui Gauss, valoarea $x=\xi$ trebuie să facă maximă expresia precedentă, rezultă că derivata logaritmică în raport cu x a acestei expresii trebuie să se anuleze în punctul $x=\xi$ Avem deci condiţia

$$\frac{\varphi'(x_1-\xi)}{\varphi(x_1-\xi)}+\frac{\varphi'(x_2-\xi)}{\varphi(x_2-\xi)}+\cdots+\frac{\varphi'(x_n-\xi)}{\varphi(x_n-\xi)}=0. \tag{12}$$

Pentru prescurtarea scrisului, folosim notaţiile

$$x_i-\xi=y_i;\quad \frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=\Phi(y). \tag{13}$$

Cu aceste notaţii, relaţiile (12) şi (11) se scriu

$$\left.\begin{aligned}\Phi(y_1)+\Phi(y_2)+\cdots+\Phi(y_n)=0,\\ y_1+y_2+\cdots+y_n=0.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Soluţia acestui sistem funcţional, adică găsirea expresiei funcţiei Φ care satisface ecuaţiile (14), se determină precum urmează. Diferenţiem, mai întîi, ecuaţiile (14); obţinem sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\left.\begin{aligned}\Phi'(y_1)\,dy_1+\Phi'(y_2)\,dy_2+\cdots+\Phi'(y_n)\,dy_n=0,\\ dy_1+dy_2+\cdots+dy_n=0.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Acest sistem trebuie să fie compatibil oricare ar fi variaţiile dy_i. Dar echivalenţa celor două ecuaţii (15) este satisfăcută, evident, dacă

$$\Phi'(y_1)=\Phi'(y_2)=\cdots=\Phi'(y_n). \tag{16}$$

Dar, cum valorile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt independente şi arbitrare, fiind supuse numai celei de-a doua relaţii de condiţie (14), rezultă că şirul de egalităţi (16) nu poate fi satisfăcut decît dacă fiecare dintre funcţiile care figurează în aceste egalităţi este o constantă. Aşadar,

$$\Phi'(y)=a=\text{const}.$$

Printr-o cuadratură simplă deducem

$$\Phi(y)=ay+b,$$

Scanned with OKEN Scanner

unde b este o nouă constantă de integrare care se determină imediat. În adevăr, înlocuind valorile (17) în relaţia (14), obţinem

$$a(y_1+y_2+\cdots+x_n)+nb=0$$

$$y_1+y_2+\cdots+y_n=0,$$

deci

$$b=0.$$

Ecuaţia (17) se reduce, deci, la

$$\Phi(y)=ay,$$

de unde, avînd în vedere notaţiile (13), rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)}=ay,$$

ceea ce, printr-o cuadratură simplă, ne dă

$$\varphi(y)=ce^{\frac{a}{2}y^2}, \tag{18}$$

unde e este baza logaritmilor neperieni, iar c o nouă constantă de integrare pe care o vom determina mai tîrziu. Pentru moment, este necesar să fixăm semnul constantei a, căci după acest semn se desemnează aspectul funcţiei exponenţiale. Pentru aceasta, observăm că, după ipoteza lui Gauss, valoarea medie ξ trebuie să facă *maximă* (şi nu minimă) funcţia de densitate. Dar valorii finite $x=\xi$ îi corespunde, după notaţiile (13), valoarea $y=0$. Urmează deci că funcţia $\varphi(y)$ trebuie să prezinte un maxim efectiv pentru $y=0$, şi anume [după (18)] egal cu c, pe care îl vom determina ulterior. Dar aceasta nu este posibil decît dacă a este o constantă *negativă;* căci dacă ar fi pozitivă, $\varphi(y)$ ar avea în $y=0$ un minim, crescînd de la c $(y=0)$ la infinit $(y=\pm\infty)$. Aşadar, sîntem conduşi să punem

$$\frac{a}{2}=-h^2,$$

ceea ce ne dă pentru (18)

$$\varphi(y)=ce^{-h^2y^2}. \tag{19}$$

Revenim la determinarea constantei c; observăm că condiţia de normare (10) este în cazul de faţă

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(y)\,dy=c\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h^2y^2}\,dy=1. \tag{20}$$

Prin substituția $hy=z$, obținem integrala cunoscută (§ 82)

$$\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{h}.$$

Cu această valoare, din relația (20) rezultă

$$c=\frac{h}{\sqrt{\pi}},$$

ceea ce, introdus în expresia (19), ne dă forma definitivă a funcției $\varphi(y)$, numită funcția de *distribuție normală a densității*

$$\varphi(y)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2y^2} \tag{21}$$

sau după (13)

$$\varphi(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2(x-\xi)^2}. \tag{22}$$

Această funcție constituie, după Gauss, legea de distribuție a erorilor întîmplătoare, pe care am găsit-o și prin simple considerații probabiliste.

Prin urmare, după considerațiile din paragraful precedent, probabilitatea ca variabila y să ia o valoare conținută în intervalul $(y, y+dy)$ este

$$dP=\varphi(y)\,dy=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2y^2}dy, \tag{23}$$

iar probabilitatea ca această variabilă să se afle într-un interval finit (y_1, y_2) este

$$P(y_1\leqslant y\leqslant y_2)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{y_1}^{y_2} e^{-h^2y^2}dy. \tag{24}$$

§ 90. Determinarea constantei h, numită „măsura preciziei"

Constanta h care figurează în legea distribuției normale nu poate fi determinată, așa cum s-a făcut cu constanta b, prin simple condiții suplimentare. Această constantă prezintă caracterul unui parametru care este specific pentru modul în care s-a făcut determinarea valorilor concrete ale variabilei continue prin măsurători. Aceasta înseamnă că parametrul h caracterizează mărimea erorilor de care sînt afectate rezultatele operațiilor experimentale. De aceea, după propunerea lui Gauss, s-a dat acestei constante numele de

Scanned with OKEN Scanner

măsură a preciziei sau *parametrul preciziei*, denumire pe care o justificăm precum urmează.

După notaţiile (13), mărimile y_i sînt ceea ce am numit în teoria erorilor erori aparente $y_i = v_i$, astfel încît putem spune că probabilitatea ca o eroare să fie cuprinsă în intervalul finit $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ este după (24)

$$P(-\varepsilon \leqslant y \leqslant +\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-h^2 y^2}\, dy .$$

Prin schimbarea de variabilă $hy = z$, aceeaşi probabilitate are valoarea

$$P(-h\varepsilon \leqslant z \leqslant +h\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\varepsilon}^{+h\varepsilon} e^{-z^2}\, dz = \theta(h\varepsilon). \tag{25}$$

Într-o altă serie de măsurători, în care parametrul de precizie ar fi h', probabilitatea unei erori cuprinsă în intervalul $(-h'\varepsilon', +h'\varepsilon')$ este

$$P(-h'\varepsilon' \leqslant z \leqslant +h'\varepsilon') = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h'\varepsilon'}^{+h'\varepsilon'} e^{-z^2}\, dz = \theta(h'\varepsilon'). \tag{26}$$

Condiţia ca probabilităţile (25) şi (26) să fie egale este evident

$$h\varepsilon = h'\varepsilon' = \text{const.}, \tag{27}$$

relaţie care exprimă proprietatea: parametrul h este invers proporţional cu eroarea ε. Deci, dacă ε ne dă valoarea limită a unei erori de care este afectată măsurătoarea, parametrul h ne indică tocmai precizia acestei determinări. Cu cît eroarea maximă este mai mică, cu atît precizia este mai bună şi invers. În paragraful următor, această proprietate primeşte o formă explicită. Prin aceasta, obţinem o concretizare a noţiunii de precizie, pe care am utilizat-o în teoria erorilor sub forma unei noţiuni legată mai mult intuitiv de eroarea medie pătratică.

§ 91. Relaţia între măsura preciziei, eroarea medie pătratică şi eroarea medie

Să considerăm, în conformitate cu formula (21), funcţia de distribuţie a erorilor reale Δ

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2}\, d\Delta$$

Scanned with OKEN Scanner

şi să calculăm eroarea medie pătratică prin relaţia

$$m^2=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 e^{-h^2\Delta^2}d\Delta.$$

Prin substituţia

$$h\Delta=x,\quad dx=h\,d\Delta,$$

rezultă, ţinînd seama de formula (90 d), § 82,

$$m^2=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-x^2}dx=\frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

aşadar, în definitiv

$$m^2=\frac{1}{2h^2}. \tag{28}$$

de unde rezultă

$$m=\frac{1}{h\sqrt{2}};\quad h=\frac{1}{m\sqrt{2}}. \tag{29}$$

Aceste formule, foarte importante, ne dau relaţia dintre eroarea medie pătratică individuală şi parametrul preciziei h, constituind o concretizare a consideraţiilor din paragraful precedent şi o precizare a sensului atribuit parametrului h.

În mod analag, definim parametrul de precizie H în determinarea valorii medii aritmetice M

$$H=\frac{1}{M\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{n}}{m\sqrt{2}}=h\sqrt{n}. \tag{30}$$

Deci, măsura preciziei mediei aritmetice a n determinări este egală cu măsura preciziei unei determinări individuale înmulţită prin rădăcina pătrată a numărului de determinări.

Pentru stabilirea relaţiei care există între parametrul h şi eroarea medie θ, definită prin relaţia (10), § 7, putem scrie

$$\theta=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Delta|\,e^{-h^2\Delta^2}d\Delta=\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\Delta\,e^{-h^2\Delta^2}d\Delta=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Prin urmare, avem relaţia importantă

$$\theta=\frac{1}{h\sqrt{\pi}}. \tag{31}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din compararea formulelor (29) şi (31) obţinem relaţiile enunţate în prima parte asupra teoriei erorilor şi utilizate de noi mai înainte

$$\left.\begin{aligned} \theta &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, m = 0{,}79788\, m \\ m &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \theta = 1{,}2533\ \theta . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

§ 92. Eroarea probabilă ρ şi relaţia dintre această eroare şi eroarea medie pătratică m

După cum ştim, eroarea probabilă se defineşte prin condiţia ca probabilitatea ca o eroare individuală să fie mai mică decît ρ

$$P(-\rho \leqslant x \leqslant \rho) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-h^2x^2}\, dx \tag{33}$$

să fie egală cu probabilitatea ca o eroare individuală să fie mai mare decît ρ

$$P(x \geqslant \rho) = 1 - \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-h^2x^2}\, dx. \tag{34}$$

Egalitatea expresiilor (33) şi (34) ne dă

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\rho}^{+\rho} e^{-h^2x^2}\, dx = \frac{1}{2}$$

sau, ceea ce este tot una,

$$\theta(h\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-h\rho}^{+h\rho} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} (= 0{,}5). \tag{35}$$

Din tabela care ne dă $\theta(\alpha)$ în funcţie de α, pe care am dat-o la § 81, găsim că valorii 0,5 a lui $\theta(\alpha)$ îi corespunde valoarea 0,4769; aşadar, se obţine ca soluţie a ecuaţiei (35)

$$h\rho = 0{,}4769. \tag{36}$$

Introducînd valoarea lui h din (29), dată prin expresia sa în funcţie de eroarea medie pătratică m, obţinem

$$\rho = 0{,}4769\sqrt{2}\, m = 0{,}6745\, m \approx \frac{2}{3} m, \tag{37}$$

formulă pe care am enunţat-o şi am utilizat-o în partea întîi (§ 10).

§ 93. Ponderea unei măsurători

Se dă numele de *pondere a unei măsurători* pătratului parametrului de precizie

$$p = h^2. \tag{38}$$

Justificarea acestei denumiri prin identificarea valorii (38) cu valoarea cu acelaşi nume definită în teoria erorilor se obţine prin rezolvarea următoarei probleme: pentru măsurarea unei mărimi X am efectuat un prim şir de măsurători, a căror precizie să fie dată de parametrul h, şi un al doilea şir de măsurători cu precizia dată de parametrul h'. Presupunem că cunoaştem rezultatul x al unei măsurători individuale din primul şir, precum şi rezultatul x' al unei măsurători individuale din al doilea şir; ne întrebăm: care este valoarea cea mai bună pe care trebuie s-o adoptăm pentru mărimea X?

În virtutea principiului valorii medii ponderate, este indicat să adoptăm pentru valoarea lui X expresia

$$X = \frac{px + p'x'}{p + p'}, \tag{39}$$

dacă am însemnat prin p şi p' ponderile respective, necunoscute. Fie Δx şi $\Delta x'$ erorile de care sînt afectate mărimile x şi x'; eroarea de care este afectată valoarea X este

$$\Delta X = \frac{p\,\Delta x + p'\Delta x'}{p + p'}.$$

Valoarea medie pătratică a erorii precedente, după § 75, este

$$M(\Delta X^2) = M\left\{\left(\frac{p_1 \Delta x + p'\Delta x'}{p + p'}\right)^2\right\} = \frac{p^2 M(\Delta x^2) + p'^2 M(\Delta x'^2)}{(p + p')^2}.$$

Punînd pentru simplificarea scrisului $\Delta x=\xi$, $\Delta x'=\xi'$, avem cu funcţia de densitate normală

$$M(\xi^2)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2 e^{-h^2\xi^2}d\xi=\frac{1}{2h^2};$$

$$M(\xi'^2)=\frac{h'}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi'^2 e^{-h'^2\xi'^2}d\xi'=\frac{1}{2h'^2}.$$

Înlocuind aceste valori în expresia (40), obţinem

$$M(\Delta X^2)=\frac{1}{2}\frac{\frac{p^2}{h^2}+\frac{p'^2}{h'^2}}{(p+p')^2}. \qquad (41)$$

Condiţia ca valoarea (39) să fie cea mai probabilă este ca eroarea medie pătratică (41) să fie minimă. Pentru a calcula această valoare minimă introducem notaţiile

$$u=\frac{p}{p+p'};\quad 1-u=\frac{p'}{p+p'}.$$

Expresia (41) devine

$$M(\Delta X^2)=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{h^2}\right)+\frac{(1-u)^2}{h'^2}.$$

O valoare extremă a acestei expresii, considerată ca funcţie de u, se obţine anulînd derivata ei în raport cu u; avem ecuaţia algebrică

$$\frac{u}{h^2}-\frac{1-u}{h'^2}=0,$$

ceea ce revine la

$$\frac{p}{h^2}=\frac{p'}{h'^2}=\text{const.} \qquad (42)$$

Se verifică uşor că această condiţie face efectiv minimă expresia precedentă.

Relaţia iniţială (38) ne spune că am ales constanta precedentă egală cu unitatea, ceea ce nu constituie o particularizare a problemei.

Scanned with OKEN Scanner

Introducînd în relația (42) expresia (28), rezultă teorema pe care am stabilit-o și la teoria erorilor

$$p=\frac{C}{m^2}, \tag{43}$$

deci ponderile sînt invers proporționale cu pătratele erorilor medii pătratice.

§ 94. Observație asupra punctelor de inflexiune ale curbei de densitate

(curba în clopot a lui Gauss)

$$y=\varphi(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}. \tag{44}$$

Se știe că aceste puncte se găsesc anulînd derivata a doua a funcției $y=\varphi(x)$. Deci,

$$\frac{d}{dx}\varphi(x)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}(-2h^2x)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}xe^{-h^2x^2} \tag{45}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi(x)=-\frac{2h^3}{\sqrt{\pi}}(1-2h^2x^2)e^{-h^2x^2}. \tag{46}$$

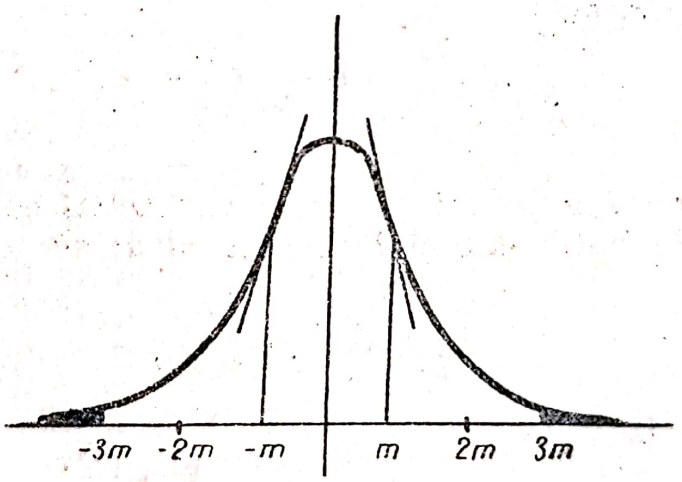


Fig. 11

Anulînd derivata doua (46), rezultă valorile

$$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}h} \tag{47}$$

sau după (28)

$$x=\pm m, \tag{48}$$

deci poziţiile punctelor de inflexiune ale curbei de distribuţie normală sînt determinate de valoarea erorii medii pătratice (fig. 11). În aceste puncte, variaţia curbei este maximă; în adevăr, pentru $x=-m$ avem $\frac{d\varphi}{dx}>0$, şi pentru $x=+m$, $\frac{d\varphi}{dx}<0$.

§ 95. Comparaţia experienţei cu teoria

Dacă prin măsurători s-a obţinut un mare număr de erori, ele pot fi clasate în intervale convenabil alese, de exemplu

$$(0, \tau)\,;\ (\tau, 2\tau)\,;\ (2\tau, 3\tau);\ \ldots \text{ pentru erorile pozitive}$$

şi

$$(0, -\tau);\ (-\tau, -2\tau)\,;\ (-2\tau, -3\tau);\ \ldots \text{ pentru erorile negative.}$$

Fie n numărul total al acestor erori. Atunci numărul abaterilor, α, adică erorile în valoare absolută cuprinse în intervalul $\nu\tau$ şi $(\nu+1)\tau$, este egal cu numărul total n înmulţit cu probabilitatea respectivă. adică

$$n\,P\,[\nu\tau \leqslant \alpha \leqslant (\nu+1)\,\tau] = n\,\{\theta\,[h\,(\nu+1)\,\tau] - \theta\,[h\,\nu\tau]\}\,. \qquad (49)$$

Dacă separăm intervalele erorilor pozitive de cele negative, putem scrie că numărul erorilor care cad în intervalele $[\nu\tau,\ (\nu+1)\,\tau]$ sau $[-\nu\tau,\ -(\nu+1)\,\tau]$ este

$$\frac{n}{2}\,\{\theta\,[h\,(\nu+1)\,\tau] - \theta\,[h\,\nu\tau]\}\,. \qquad (50)$$

Prin urmare, după ce determinăm pe h prin una dintre metodele precedente, ne servim de tabela funcţiilor θ şi obţinem astfel valorile teoretice (50), pe care urmează apoi să le comparăm cu datele experimentale. Dacă această comparaţie conduce la o nepotrivire prea accentuată, conchidem că există erori sistematice care nu au fost eliminate în prealabil.

§ 96. Combinarea mai multor legi de distribuţie normală independente, cu parametri de precizie diferiţi

Pînă acum ne-am ocupat de legea normală pentru o singură variabilă, unde figurează un singur parametru de precizie h. Unele probleme puse de practică, însă, pot conduce la legi de distribuţie normală pentru diferite variabile, cu parametri de precizie diferiţi. Admitem că aceste variabile sînt independente între ele. De exemplu, chiar dacă un unghi se măsoară de un acelaşi observator, cu

Scanned with OKEN Scanner

acelaşi instrument, totuşi rezultatele nu pot fi privite — riguros vorbind — ca perfect egale, întrucît mai intervin şi alte cauze de perturbare a observaţiilor, cauze pe care nu le luăm în seamă din primul moment: vizibilitatea punctului vizat, orientarea şi stabilitatea instrumentului, atenţia observatorului, toate pot varia în cursul unei observaţii. Pentru eliminarea influenţei supărătoare a unor astfel de perturbări, se procedează la gruparea observaţiilor pe categorii, care să răspundă cît mai omogen la afectarea unei precizii h_1, respectiv h_2, h_3 etc.

Mai mult, sînt probleme puse de practică care conduc la necesitatea introducerii mai multor variabile independente între ele sau supuse unor anumite legături; asupra acestora din urmă rămîne să revenim mai tîrziu.

Pentru concretizarea ideilor, ne oprim la cazul a două grupe de astfel de observaţii, avînd parametrii de precizie h_1 şi h_2. Ne punem problema ca din legile de distribuţie normală ale celor două grupuri independente să deducem legea de distribuţie a rezultatului total.

Fie deci o mărime variabilă z care poate fi determinată indirect, putînd fi exprimată liniar prin două variabile independente x, y, determinabile direct (α şi β fiind constante)

$$Z=\alpha x+\beta y. \tag{51}$$

Fie

$$\varphi_1(x)=\frac{h_1}{\sqrt{\pi}}e^{-h_1^2x^2}dx, \tag{52}$$

$$\varphi_2(y)=\frac{h_2}{\sqrt{\pi}}e^{-h_2^2y^2}dy \tag{53}$$

funcţiile de distribuţie normală respective. Se cere să calculăm funcţia de distribuţie pentru variabila z dată de relaţia (51).

În acest scop, observăm că, în virtutea legii probabilităţilor compuse, probabilitatea ca variabilele x şi y să aibă simultan valori cuprinse în intervalele $(x, x+dx)$ respectiv $(y, y+dy)$ este egală cu produsul probabilităţilor individuale, anume

$$dP_{x,y}=\frac{h_1h_2}{\pi}e^{-(h_1^2x^2+h_2^2y^2)}dx\,dy. \tag{54}$$

Pentru a obţine probabilitatea ca variabila compusă să fie cuprinsă între două valori $(z, z+dz)$, trebuie să sumăm toate probabilităţile elementare pentru toate perechile de valori (x, y) care satisfac condiţia

$$z\geqslant\alpha x+\beta y\geqslant z+dz. \tag{55}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru probabilitatea căutată avem

$$P(z)=\frac{h_1h_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{y=\frac{z-\alpha x}{\beta}}^{y=\frac{z-\alpha x}{\beta}+\frac{dz}{\beta}}e^{-(h_1^2x^2+h_2^2y^2)}\,dy, \tag{56}$$

deoarece limitele pentru una dintre variabile, de exemplu y, sînt fixate de relaţiile (55), în funcţie de cealaltă variabilă.

Pentru efectuarea integralelor precedente utilizăm formula mediei

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon+d\varepsilon}f(x)\,dx=f(\varepsilon)\,d\varepsilon, \tag{57}$$

cunoscută din analiza matematică. Aplicînd această formulă, expresia (56) devine

$$P(z)=\frac{h_1h_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\,e^{-\left\{h_1^2x^2+h_2^2\left(\frac{z-\alpha x}{\beta}\right)^2\right\}}\frac{dz}{\beta} \tag{58}$$

sau

$$P(z)=\frac{h_1h_2}{\pi}\frac{dz}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(ax^2+2bx+c)}\,dx, \tag{59}$$

unde am pus

$$a=\frac{\beta^2h_1^2+\alpha^2h_2^2}{\beta^2}$$

$$b=-\frac{h_2^2\alpha}{\beta^2}z \tag{60}$$

$$c=\frac{h_2^2}{\beta^2}z^2.$$

De aici rezultă imediat

$$ac-b^2=\frac{h_1^2h_2^2}{\beta^2}z^2>0. \tag{61}$$

Pentru efectuarea integralei care figurează în expresia (59), observăm că putem descompune trinomul de la exponent precum urmează

$$ax^2+2bx+c=\left(\sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a},$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît pentru integrala din expresia (59) avem

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2+\frac{ac-b^2}{a}\right\}}dx=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2}\sqrt{a}\,dx$$

sau, punînd

$$\sqrt{a}\,x+\frac{b}{\sqrt{a}}=u;\ \sqrt{a}\ dx=du,$$

deducem

$$I=\frac{1}{\sqrt{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{ac-b^2}{a}}. \qquad (62)$$

Introducînd valorile (60), (61) şi (62) în expresia (59), obţinem

$$P(z)=\frac{h_1 h_2}{\pi}\frac{dz}{\beta}\frac{\sqrt{\pi}\,\beta}{\sqrt{\beta^2h_1^2+\alpha^2h_2^2}}e^{-\frac{h_1^2h_2^2}{\beta^2h_1^2+\alpha^2h_2^2}} \qquad (63)$$

sau, punînd

$$\varphi(z)\,dz=P(z),$$

rezultă pentru funcţia de distribuţie căutată expresia

$$\varphi(z)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2z^2}, \qquad (64)$$

dacă notăm

$$h^2=\frac{h_1^2h_2^2}{\beta^2h_1^2+\alpha^2h_2^2},$$

ceea ce revine la

$$\frac{1}{h^2}=\frac{\alpha^2}{h_1^2}+\frac{\beta^2}{h_2^2}. \qquad (65)$$

Acest rezultat remarcabil ne arată că funcţia de distribuţie rezultantă este tot de tipul distribuţiei normale ca şi funcţiile parţiale.

Este clar că teorema se extinde de la sine şi la compunerea unui număr oarecare, finit, de funcţii de distribuţie normală, cu parametri de precizie diferiţi.

Trebuie reţinut, însă, că teorema reciprocă nu este demonstrată decît pentru o relaţie liniară (51) între cele două variabile; acest caz rezultă din consideraţiile precedente, dar nu se poate generaliza pentru orice relaţie între cele două variabile aleatorii.

Scanned with OKEN Scanner

§ 97. Distribuţia normală în cazul mai multor dimensiuni. Problema reglării tirului

Ca exemplu tipic de funcţie normală compusă tratăm problema experimentală pusă de chestiunea reglării tirului: asupra unei ţinte plane se trage cu arma, trăgătorul propunîndu-şi să lovească centrul unui cerc desenat pe ţinta dreptunghiulară, ţintă aşezată la o anumită distanţă de trăgător. Nimerirea ţintei depinde, în general, de calităţile trăgătorului; totuşi, dacă distanţa de la trăgător la ţintă este suficient de mare, este clar că nu vor intra toate loviturile în centru, ci se vor distribui în jurul acestui punct în mod mai mult sau mai puţin neregulat, din cauza unor diferite influenţe întîmplătoare, de care trăgătorul nu poate ţine seamă la fiecare lovitură.

Repartizarea punctelor care indică loviturile în jurul centrului de vizare de pe ţintă are deci caracterul unei distribuţii întîmplătoare şi de aceea este natural să examinăm această problemă în lumina teoriei probabilităţilor. Ne punem deci problema determinării probabilităţii ca o lovitură să cadă într-o anumită regiune delimitată pe ţintă, considerînd depărtarea de punctul vizat — centrul ţintei — drept abatere.

Dar, în planul ţintei poziţia unui punct se fixează prin două coordonate (x, y) faţă de un sistem de coordonate cartezian cu originea în centrul de vizare, pe care-l putem trasa pe planul ţintei.

Fie deci $\varphi(x, y)\, dx\, dy$ probabilitatea ca o lovitură să cadă în dreptunghiul infinitezimal cu vîrfurile

$$(x, y);\ (x+dx, y);\ (x, y+dy);\ (x+dx, y+dy).$$

Printr-un raţionament analog cazului unei singure variabile, funcţia de densitate a punctului din planul ţintei se poate scrie

$$\varphi(x, y) = C\, e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}, \tag{66}$$

cu condiţia ca trinomul de la exponent să rămînă mereu pozitiv, oricare ar fi valorile lui x şi y; ceea ce revine analitic la condiţia ca forma pătratică de la exponent să fie pozitiv definită

$$b^2 - ac < 0,\ a > 0, \tag{67}$$

constanta C urmînd a fi determinată prin condiţia de normare.

Pentru a exprima convenabil funcţia de distribuţie, vom reduce expresia care figurează în exponentul funcţiei exponenţiale (66) la forma canonică, punînd

$$ax^2+2bxy+cy^2 = \alpha^2u^2+\beta^2v^2, \tag{68}$$

ceea ce se obține efectuînd o transformare de variabile care exprimă o rotație a axelor de coordonate în jurul originii

$$\begin{aligned} x &= u\cos\theta - v\sin\theta \\ y &= u\sin\theta + v\cos\theta . \end{aligned} \tag{69}$$

Condiția (68) ne dă

$$a(u\cos\theta - v\sin\theta)^2 + 2b\,(u\cos\theta - v\sin\theta)\,(u\sin\theta + v\cos\theta) + \\ + c(u\sin\theta + v\cos\theta)^2 = \alpha^2u^2 + \beta^2v^2 .$$

Prin identificarea coeficienților obținem

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= a\cos^2\theta + 2b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\ \beta^2 &= a\sin^2\theta - 2b\cos\theta\sin\theta + c\cos^2\theta \\ 0 &= -a\sin\theta\cos\theta + b\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + c\sin\theta\cos\theta . \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Adunînd primele două relații (70), obținem

$$a + c = \alpha^2 + \beta^2 . \tag{71}$$

Înmulțind primele două relații (70) și ținînd seama de ultima relație (70), rezultă

$$ac - b^2 = \alpha^2\beta^2 . \tag{72}$$

Ultima relație (70) ne dă unghiul de rotație

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2b}{a-c} . \tag{73}$$

Înlocuind acum în expresia funcției (66) exponentul prin forma canonică dată de (68) și scriind condiția de normare, obținem relația care determină constanta arbitrară C care figurează în (66). Avem

$$C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha^2u^2+\beta^2v^2)}\,du\,dv = 1 .$$

Rezultă succesiv

$$1 = C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2u^2}\,du \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta^2v^2}\,dv = C\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\beta} = C\frac{\pi}{\alpha\beta} ,$$

de unde, ținînd seama de relația (72), deducem

$$C = \frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} . \tag{74}$$

mărime reală, după condiţia (67). Cu valoarea (74), funcţia de distribuţie (6) se scrie fie sub forma

$$\varphi(x, y)=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}, \tag{75}$$

fie sub forma

$$\varphi(u, v)=\frac{\alpha\beta}{\pi} e^{-(\alpha^2u^2+\beta^2v^2)}, \tag{76}$$

ţinînd seama de relaţiile (69) şi (70).

§ 98. Elipsa de egală probabilitate şi elipsa probabilă

Elipsă de egală probabilitate se numeşte elipsa $(E_\varkappa)$ trasată în planul ţintei, avînd ca ecuaţie faţă de sistemul de coordonate cartezian

$$ax^2+2bxy+cy^2=\varkappa, \tag{77}$$

unde $\varkappa$ este o constantă pozitivă şi care se bucură de proprietatea că toate loviturile posedă aceeaşi probabilitate de a cădea în interiorul elipsei $(E_\varkappa)$. După expresia (75), această probabilitate este

$$P_\varkappa=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\int\int_{(E_\varkappa)} e^{-(a\xi^2+2b\xi\eta+c\eta^2)}\,d\xi\,d\eta. \tag{78}$$

Efectuînd transformarea

$$\begin{aligned}\xi&=u\cos\theta-v\sin\theta\\ \eta&=u\sin\theta+v\cos\theta,\end{aligned} \tag{79}$$

ecuaţia elipsei (77) se scrie

$$\alpha^2u^2+\beta^2v^2=\varkappa \tag{80}$$

sau

$$\frac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{\alpha}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{\varkappa}}{\beta}\right)^2}=1, \tag{81}$$

unde α şi β sînt date de relaţiile (70) din paragraful precedent. Pentru a calcula semiaxele elipsei

$$r_1=\frac{\sqrt{\varkappa}}{\alpha},\quad r_2=\frac{\sqrt{\varkappa}}{\beta}, \tag{82}$$

trebuie să rezolvăm sistemul de ecuaţii (71) şi (72)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=a+c,\\ \alpha^2\beta^2&=ac-b^2.\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii algebrice ne duce la următoarele expresii pentru semiaxele elipsei

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= \varkappa \frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(ac-b^2)} \\ r_2^2 &= \varkappa \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(ac-b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

Expresia probabilităţii (78) se poate scrie

$$P_\varkappa = \frac{\alpha\beta}{\pi} \iint\limits_{(E_\varkappa)} e^{-(\alpha^2 u^2+\beta^2 v^2)}\, du\, dv,$$

integrală care se calculează imediat prin substituţia

$$u = \frac{1}{\alpha}\rho\cos\psi, v = \frac{1}{\beta}\rho\sin\psi. \tag{84}$$

Se obţine

$$P_\varkappa = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{(E_\varkappa)} \rho e^{-\rho^2} d\rho\, d\psi$$

sau

$$P_\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\sqrt{\varkappa}} \rho e^{-\rho^2} d\rho = \frac{2\pi}{\pi}\left| -\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right|_0^{\sqrt{\varkappa}} = 1-e^{-\varkappa}, \tag{85}$$

deoarece după (84) şi (80) raza vectoare ρ variază de la zero pînă la valoarea $\alpha^2u^2+\beta^2v^2=\rho^2=\varkappa$.

Prin urmare, probabilitatea ca o lovitură să cadă în intervalul elipsei $(E_\varkappa)$ este

$$P_\varkappa = 1-e^{-\varkappa}. \tag{86}$$

Această relaţie are o însemnătate utilitate practică pentru reglarea tragerii. În adevăr, dacă luăm arbitrar n lovituri, numărul mediu al loviturilor care cad în intervalul elipsei $(E_\varkappa)$ este

$$n P_\varkappa = n(1-e^{-\varkappa}), \tag{87}$$

număr pe care-l putem compara direct cu numărul punctelor de pe ţintă cuprinse în elipsa respectivă, ceea ce ne dă posibilitatea verificării practice a legii de probabilitate găsită teoretic.

Scanned with OKEN Scanner

Să luăm, de exemplu, nouă elipse concentrice care împart planul în zece regiuni, avînd

$$\varkappa_1=\ln\frac{10}{9}=0{,}10537,\quad \varkappa_4=\ln\frac{10}{6}=0{,}51083,\quad \varkappa_7=\ln\frac{10}{3}=1{,}20398$$

$$\varkappa_2=\ln\frac{10}{8}=0{,}22315,\quad \varkappa_5=\ln\frac{10}{5}=0{,}69315,\quad \varkappa_8=\ln\frac{10}{2}=1{,}60944$$

$$\varkappa_2=\ln\frac{10}{7}=0{,}35668,\quad \varkappa_6=\ln\frac{10}{4}=0{,}91630,\quad \varkappa_9=\ln\frac{10}{1}=2{,}30259.$$

Rezultă că în fiecare regiune trebuie să se găsească aproximativ a zecea parte din numărul total al loviturilor. Dacă numărul de puncte de pe țintă corespunde acestui rezultat teoretic, verificarea practică a teoriei este confirmată.

Elipsă probabilă se numește elipsa a cărei suprafață are toate șansele să fie sau să nu fie atinsă de lovituri. Deci pentru o astfel de elipsă trebuie să avem

$$1-e^{-\varkappa}=\frac{1}{2},$$

ceea ce ne dă

$$\varkappa=\ln 2=0{,}69315. \tag{88}$$

§ 99. Calculul practic al pozițiilor elipselor

Direcțiile axelor elipsei de egală probabilitate sînt determinate de unghiul θ dat prin relația (73), iar semiaxele sînt date prin relațiile (83), dacă raportăm elipsa la sistemul de axe cartezian cu originea în centrul de vizare ales pe ținta plană considerată, care coincide cu centrul elipsei probabile.

Practic, însă, trasarea elipselor de egală probabilitate se simplifică dacă le raportăm la axele lor de simetrie (u, v) și dacă observăm că funcția de distribuție (76) ne permite să determinăm probabilitatea de a găsi o lovitură în banda de grosime du paralelă cu axa v, anume

$$dP_u=\frac{\alpha\beta}{\pi}e^{-\alpha^2u^2}\,du\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta^2v^2}\,dv=\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2u^2}\,du. \tag{89}$$

Dar expresia (89) are tocmai forma legii lui Gauss de distribuție normală a erorilor, unde α înseamnă parametrul de precizie respectiv, corespunzător erorii medii pătratice m_u, astfel încît, după formula (29), putem scrie

$$\alpha m_u=\frac{1}{\sqrt{2}}=0{,}4771, \tag{90}$$

În mod analog, probabilitatea ca punctele să se găsească în banda de grosime dv paralelă cu axa u, este

$$dP_v = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} e^{-\beta^2 v^2} dv, \tag{91}$$

ceea ce înseamnă că avem de asemenea

$$\beta m_v = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}4771, \tag{92}$$

unde m_v este eroarea medie pătratică care corespunde direcției v. Ținînd seamă de valorile semiaxelor elipsei, date de relațiile (82), și de valorile (90) și (92), putem exprima semiaxele în funcție de erorile medii pătratice rezultate din operațiile de măsurare; în adevăr, avem

$$r_1 = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\alpha} = m_u \frac{\sqrt{\varkappa}}{0{,}4771}; \quad r_2 = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\beta} = m_v \frac{\sqrt{\varkappa}}{0{,}4771}. \tag{93}$$

Pentru elipsa probabilă (§ 98), aceste valori devin, după (88)

$$r_{1p} = m_u \frac{\sqrt{0{,}69315}}{0{,}4771} \approx \frac{7}{4} m_u; \quad r_{2p} \approx \frac{7}{4} m_v. \tag{94}$$

Cum aria elipsei este $\pi r_1 r_2$, rezultă că tirul este cu atît mai precis, cu cît aria elipsei probabile, egală cu $\left(\frac{7}{4}\right)^2 m_u m_v$, este mai mică, deoarece atunci erorile medii pătratice m_u și m_v sînt mai mici.

Caz particular: cercul. Avem $\alpha = \beta$; rezultă $r_1 = r_2 = r$ și $m_u = m_v = m$. Așadar raza cercului probabil este

$$r = m \frac{\sqrt{\varkappa}}{0{,}4771} \approx \frac{7}{4} m. \tag{95}$$

Aplicație numerică. Pentru verificarea practică a teoriei de mai sus dăm cîteva date numerice cunoscute din experiențele executate. Astfel, pentru vechea armă utilizată de infanteria noastră, erorile medii, care au fost determinate experimental, sînt pentru distanțele indicate:

100 m	2 cm	4 cm
200	7	7
300	8	12
400	13	16
500	18	23
600	24	28
700	31	37

Scanned with OKEN Scanner

În vechile dispozitive de tragere, ținta era prevăzută cu șapte cercuri concentrice, razele lor fiind calculate prin valoarea medie a erorilor corespunzătoare celor două direcții, după formula

$$m=\frac{m_u+m_v}{2}; \tag{96}$$

așadar

$$r=\frac{7}{4}m. \tag{97}$$

Cu datele din tabela anterioară se obține

$r_1=5{,}0$	pentru distanța de	100 m
$r_2=12{,}0$		200
$r_3=17{,}5$		300
$r_4=25{,}5$		400
$r_5=36{,}0$		500
$r_6=45{,}5$		600
$r_7=59{,}5$		700

Dacă se trag, de exemplu, 100 lovituri asupra unei astfel de ținte, de la distanța de 300 metri, ne întrebăm: cîte lovituri vor intra în fiecare dintre coroanele circulare determinate pe țintă de cele șapte cercuri?

Probabilitatea de a atinge cele șapte cercuri este, după teoria dezvoltată anterior,

$$P_x=1-e^{-x}, \tag{86}$$

unde x trebuie calculat după relația (95)

$$r=m\,\frac{\sqrt{x}}{0{,}4771},$$

ceea ce ne dă

$$x=\left(\frac{0{,}4771}{m}\,r\right)^2.$$

După datele de mai sus și cu formulele (96) și (97), pentru distanța de 300 m, obținem $m=\frac{8+12}{2}=10$; așadar

$$x=(0{,}04771)^2\,r^2.$$

ceea ce cu datele din tabela precedentă ne dă

r	x	P
5,0	0,0556	0,054
12,0	0,3276	0,279
17,5	0,6968	0,500
25,5	1,4795	0,772
36,0	2,9488	0,948
45,5	4,7104	0,991
59,5	8,0553	0,999

Scanned with OKEN Scanner

Probabilităţile care corespund coroanelor circulare respective şi numerele de lovituri care cad în aceste coroane sînt

Coroana	Probabilitatea	Numărul de lovituri %
1	0,054 ≈ 0,05	5
2	0,225 ≈ 0,23	23
3	0,221 ≈ 0,22	22
4	0,272 ≈ 0,27	27
5	0,176 ≈ 0,18	18
6	0,043 ≈ 0,04	4
7	0,008 ≈ 0,01	1

Aceste date teoretice se verifică cu datele experimentale şi permit concluzii asupra justeţei teoriei cît şi asupra condiţiilor în care s-au executat tragerile, permiţînd corectarea defectelor.

Capitolul III

Variabile aleatorii corelate

§ 100. Corelaţia caracteristicilor

În §§ 71, 72 şi 73 am definit o colectivitate statistică de elemente prin anumite caractere comune şi omogene de structură, iar probabilitatea statistică a fost definită atît prin distribuţia colectivităţii considerate, cît şi prin natura operaţiei care stabileşte modul de alegere arbitrară a unuia dintre elementele colectivităţii considerate.

În general, atît distribuţia cît şi procesul de alegere se bazează pe fixarea uneia sau mai multor caracteristici determinate. Aceste caracteristici pot fi independente între ele: una dintre ele exclude realizarea simultană a celorlalte. Aceasta a fost ipoteza fundamentală în virtutea căreia am dezvoltat consideraţiile precedente. Dar acest caz nu îmbrăţişează totalitatea problemelor puse de practică şi de ştiinţă. Pentru a concretiza ideile, să luăm cazul unei colectivităţi statistice definită prin două caracteristici, de exemplu, o colectivitate de elemente cărora le măsurăm două caractere bine definite.

Se pot prezenta trei cazuri. Primul caz este cel considerat pînă acum: cele două caracteristici sînt *independente*. Un exemplu spe-

Scanned with OKEN Scanner

cific pentru o astfel de colectivitate îl avem chiar în problema tirului, pe care am tratat-o în paragrafele precedente. Este clar că putem forma, şi chiar am format în § 99, două subcolectivităţi după distribuţiile pe direcţia axei u sau a axei v, distribuţii complet independente. Ele diferă între ele şi faţă de colectivitatea totală numai prin masa lor, nu şi prin structura lor.

Un al doilea caz se poate prezenta atunci cînd există o *relaţie funcţională* între cele două caracteristici. Exemplu: o colectivitate de particule gazoase în masa unui gaz ideal. Caracteristici: densitatea şi presiunea la o temperatură dată. Se ştie că între aceste mărimi care caracterizează starea unui gaz ideal există relaţia funcţională dată de legea lui Boyle şi Mariotte. Cunoaşterea uneia dintre caracteristici permite determinarea exactă a celeilalte cu ajutorul legii fizice care le leagă. Dacă din colectivitatea totală (particule gazoase la o temperatură dată) selecţionăm două subcolectivităţi (după presiune şi după densitate), constatăm că există o relaţie funcţională între aceste subcolectivităţi selecţionate, care diferă între ele şi faţă de colectivitatea neselecţionată atît prin masa lor, cît şi prin structura lor.

Între aceste două cazuri extreme se plasează un caz intermediar foarte important, caracterizat prin faptul că între cele două caracteristici există o anumită *corelaţie*, care nu constituie însă o relaţie funcţională propriu-zisă. În statistica matematică se dau numeroase exemple de astfel de corelaţii. Să luăm exemplul unei colectivităţi de oameni adulţi, aleasă pe baza următoarelor două caracteristici: înălţimea şi perimetrul toracelui. Este clar că subcolectivitatea selecţionată după înălţime va conţine elemente avînd diferite perimetre ale toracelui şi invers. Totuşi, nu se poate afirma că perimetrul toracelui este o funcţie univoc definită de înălţime; însă se constată, la o analiză mai amănunţită, că în subcolectivităţile selecţionate după una dintre caracteristici, cealaltă caracteristică variază mai puţin decît în colectivitatea globală: există deci o *corelaţie* (nefuncţională) între cele două caracteristici considerate. Spunem că o subcolectivitate selecţionată prezintă o distribuţie legată, definită printr-o variabilă de corelaţie şi caracterizată printr-un *coeficient de corelaţie*.

Pentru concretizarea problemei, vom trata o chestiune pusă de practica geodezică, privitoare la dezvoltarea unei baze geodezice în condiţii de precizie maximă.

Mai amintim că unele probleme de mecanică statistică conduc la distribuţii corelate, care se pun şi în fizica particulelor elementare, a căror statistică, în spaţiul fazelor, include condiţia ca sistemul de particule să posede o energie constantă.

Scanned with OKEN Scanner

În scopul precizării consideraţiilor de mai sus, am observat că, pentru a stabili ce probabilitate corespunde fiecărei valori a unei variabile dependente y, posibilă pentru o anumită valoare a variabilei aleatorii x, trebuie să ţinem seama de „legea de distribuţie" a valorilor lui y. Cum această lege poate să fie diferită pentru fiecare x, spunem că avem de-a face cu o distribuţie parţială, pe care am reprezentat-o matematic prin funcţia $\varphi_x(y)$, astfel încît probabilitatea ca $y(x)$ să fie cuprinsă în intervalul $(y,\ y+dy)$ pentru o anumită valoare a variabilei independente x este $\varphi_x(y)dy$ sub condiţia de normare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_x(y)\, dy = 1.$$

În cele mai multe aplicaţii practice, funcţia $\varphi_x(y)$ este astfel construită, încît ea este diferită de zero numai în vecinătatea unei valori medii a lui y. Această valoare medie este speranţa matematică parţială a lui y pentru x (§ 77)

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, \varphi_x(y)\, dy.$$

Valorile posibile ale lui y se grupează în jurul acestei valori medii, iar abaterile de la această valoare sînt atît pozitive cît şi negative, astfel încît în ansamblul lor ele se anulează. De ambele părţi ale valorii medii, funcţia de distribuţie tinde către zero. Cu cît domeniul în care funcţia de distribuţie ia valori pozitive este mai îngust, cu atît dependenţa statistică dintre cele două variabile aleatorii y şi x este mai strînsă. Gradul acestei dependenţe este definit prin dispersia parţială (§ 25)

$$\sigma^2_{y,x} = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E_x)^2\, \varphi_x(y)\, dy\,,$$

care este, după cum ştim, eroarea medie pătratică faţă de valoarea medie E_x luată ca mărime de referinţă şi reprezintă o măsură a întinderii domeniului în care pot cădea valorile posibile ale lui y pentru o valoare dată anticipat lui x.

Precizăm acum că variabilele y şi x sînt *dependente statistic* dacă funcţiile de distribuţie parţială $\varphi_x(y)$ nu sînt toate egale pentru diferitele valori ale lui x. Dacă însă $\varphi_x(y)$ este acelaşi pentru toţi x, spunem că variabilele y şi x sînt *independente statistic*.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă admitem însă că toate distribuţiile parţiale sînt inegale, dar au aceeaşi valoare medie, obţinem un nou tip de dependenţă, care este mai puţin cuprinzătoare decît dependenţa statistică. Dacă speranţa matematică E_x este independentă de x, adică o constantă, spunem că y şi x nu sînt corelate; dacă însă E_x depinde de x, spunem că variabila y este corelată cu variabila x. Este clar că independenţa statistică implică necorelaţia, pe cînd necorelaţia este o condiţie necesară, dar nu şi suficientă, pentru independenţa statistică.

Dacă se reprezintă grafic speranţa matematică parţială a lui y ca funcţie de x, se obţine, în cele mai multe cazuri, o curbă numită *curbă de regresiune*, care în problemele practice este de obicei o dreaptă.

§ 101. Formularea matematică a legii distribuţiilor normale corelate. Legea lui Gauss-Bravais

Dacă se efectuează măsurători prin care se determină, pentru fiecare element al unei colectivităţi statistice, valorile a două caracteristici, putem reprezenta fiecare rezultat individual printr-un punct în plan. Mulţimea tuturor acestor puncte se va prezenta ca o aglomeraţie sau ca un nor de puncte, putînd avea diferite aspecte. În cazul unei relaţii funcţionale, acest nor de puncte se va strînge, aşezîndu-se riguros pe o curbă definită de însăşi ecuaţia funcţională. Dacă însă norul este difuz, avînd totuşi o densitate mai mare în imediata vecinătate a unei curbe continue, vom avea de-a face cu o relaţie avînd cu atît mai puternic aspectul unei relaţii funcţionale, cu cît densitatea este mai mare pe traiectoria curbei considerate.

Este evident că vom putea avea distribuţii discrete şi continue după cum cele două caracteristici sînt susceptibile de şiruri discrete sau succesiuni continue de valori.

În orice caz, distribuţia astfel considerată defineşte o lege de probabilitate, care conţine două variabile x şi y corespunzătoare celor două distribuţii. Aceste două variabile pot fi imaginate drept coordonatele unui punct, faţă de un sistem cartezian de coordonate.

Am amintit că funcţia de densitate în acest caz se poate deduce ca şi în cazul unei singure variabile, putîndu-se pune sub forma (75), numită *legea de distribuţie Gauss-Bravais*

$$\varphi(x, y) = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{\pi} e^{-(ax^2 + 2bxy + cy^2)} \qquad (1)$$

şi am arătat cum se poate reduce forma pătratică pozitiv definită de la exponent la forma canonică pe care acum o exprimăm

$$ax^2+2bxy+cy^2=h_1^2u^2+h_2^2v^2 \tag{2}$$

cu ajutorul transformărilor (69). Presupunem acum că luăm originea comună a sistemelor de coordonate (x, y) şi (u, v) în centrul de greutate al norului de particule

$$x_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i, \qquad y_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i, \tag{3}$$

punct care coincide cu centrul elipselor omotetice şi confocale de egală probabilitate, sistemul de axe (u, v) fiind orientat după axele principale ale elipselor de egală probabilitate.

În aceste condiţii, coordonatele pe care le-am notat în (2) cu x, y, respectiv u, v, sînt de fapt diferenţele faţă de centrul de greutate, care defineşte valorile medii ale coordonatelor x, y, raportate la un sistem de axe oarecare în plan. Pentru uşurinţa scrisului, păstrăm notaţiile x, y, respectiv u, v, în loc de Δx, Δy, respectiv Δu, Δv.

Un calcul simplu ne arată că valorile medii ale erorilor sînt nule. În adevăr,

$$\begin{aligned} M(x)&=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\iint x\,e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy=0 \\ M(y)&=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\iint y\,e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy=0, \end{aligned} \tag{4}$$

integralele fiind extinse la tot planul.

Să calculăm valorile medii pătratice. Avem, folosind substituţia (69), identitatea (2) şi relaţia (72):

$$\begin{aligned} M(x^2)&=\frac{\sqrt{ac-b^2}}{\pi}\iint x^2\,e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)}\,dx\,dy= \\ &=\frac{h_1h_2}{\pi}\iint(u\cos\theta-v\sin\theta)^2\,e^{-(h_1^2u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv= \\ &=\frac{h_1h_2}{\pi}\Big\{\cos^2\theta\iint u^2\,e^{-(h_1^2u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv- \\ &\quad-2\sin\theta\cos\theta\iint uv\,e^{-(h_1u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv+ \\ &\quad+\sin^2\theta\iint v^2\,e^{-(h_1^2u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv\Big\}, \end{aligned} \tag{5}$$

integralele fiind extinse la tot planul.

Scanned with OKEN Scanner

Dar, se verifică uşor că avem

$$\frac{h_1h_2}{\pi}\iint u^2\,e^{-(h_1^2u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv=\frac{h_1h_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\,e^{-h_1^2u^2}\,du\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h_2^2v^2}\,dv=\frac{1}{2h_1^2}$$

$$\frac{h_1h_2}{\pi}\iint v^2\,e^{-(h_1^2u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv=\frac{h_1h_2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}v^2\,e^{-h_2^2v^2}\,dv\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-h_1^2u^2}\,du=\frac{1}{2h_2^2}$$

$$\iint uv\,e^{-(h_1^2u^2+h_2^2v^2)}\,du\,dv=\int_{-\infty}^{+\infty}u\,e^{-h_1^2u^2}\,du\int_{-\infty}^{+\infty}v\,e^{-h_2^2v^2}\,dv=0.$$

Înlocuind valorile precedente în relaţia (5), obţinem

$$M(x^2)=\frac{\cos^2\theta}{2h_1^2}+\frac{\sin^2\theta}{2h_2^2} \tag{6}$$

şi, printr-un calcul analog,

$$M(xy)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)\sin\theta\,\cos\theta \tag{7}$$

$$M(y^2)=\frac{\sin^2\theta}{2h_1^2}+\frac{\cos^2\theta}{2h_2^2}. \tag{8}$$

Reamintim că expresiile precedente, cu notaţiile adoptate, reprezintă erorile medii pătratice respective, deoarece prin definiţie

$$\left.\begin{aligned} nm_x^2&=M(x^2)=\sum x^2\\ nm_y^2&=M(y^2)=\sum y^2\\ nm_{xy}&=M(xy)=\sum xy, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

unde n înseamnă numărul total al determinărilor.

În primul rînd, observăm că din relaţiile (6)—(9) deducem

$$\frac{4}{n^2}\left\{\sum x^2\sum y^2-\left(\sum xy\right)^2\right\}=\frac{1}{h_1^2h_2^2}, \tag{10}$$

de unde, ţinînd seama de formulele (70), § 97, scrise cu notaţiile actuale, obţinem

$$\left.\begin{aligned} h_1^2&=a\cos^2\theta+2b\cos\theta\sin\theta+c\sin^2\theta\\ h_2^2&=a\sin^2\theta-2b\cos\theta\sin\theta+c\cos^2\theta\\ 0&=a\sin\theta\cos\theta+b(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+c\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă împărţim succesiv relaţiile (6), (7) şi (8) cu (10) şi ţinem seamă de (9) şi (11), găsim valorile coeficienţilor care figurează în legea de distribuţie *Gauss-Bravais*

$$a=\frac{n\sum x^2}{2\{\sum x^2\sum y^2-(\sum xy)^2\}}$$

$$b=-\frac{n\sum(xy)}{2\{\sum x^2\sum y^2-(\sum xy)^2\}} \qquad (12)$$

$$c=\frac{n\sum y^2}{2\{\sum x^2\sum y^2-(\sum xy)^2\}}.$$

În numitorii din membrii ai doilea ai relaţiilor precedente, scoatem în factor produsul $\sum x^2\sum y^2$ şi notăm

$$r_{xy}^2=\frac{(\sum xy)^2}{\sum x^2\sum y^2}. \qquad (13)$$

Introducînd această notaţie în egalităţile (12) şi ţinînd seamă de valorile (9), obţinem

$$a=\frac{1}{2m_x^2}\frac{1}{1-r^2}=\frac{h_1^2}{2(1-r^2)}$$

$$b=-\frac{m_{xy}}{2m_x^2m_y^2}\frac{1}{1-r^2}=-\frac{h_1h_2r}{2(1-r^2)} \qquad (14)$$

$$c=\frac{1}{2m_y^2}\frac{1}{1-r^2}=\frac{h_2^2}{2(1-r^2)},$$

unde am notat pentru prescurtare $r=r_{xy}$, iar erorile medii pătratice prin

$$m_x^2=M(\Delta x^2),\quad m_y^2=M(\Delta y^2),\quad m_{xy}=M(\Delta x\,\Delta y), \qquad (15)$$

întrucît dacă ξ, η sînt valorile medii ale lui x şi y, avem prin definiţie

$$m_x^2=M[(x-\xi)^2],\quad m_y^2=M[(y-\eta)^2] \qquad (16)$$

şi

$$m_{xy}=M[(x-\xi)(y-\eta)]=\sum(x-\xi)(y-\eta). \qquad (17)$$

Cu notaţiile (15), expresia (1) devine

$$\varphi(xy)=\frac{h_1h_2}{2\pi\sqrt{1-r^2}}e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\{h_1^2x^2-2rh_1h_2xy+h_2^2y^2\}}, \qquad (18)$$

ceea ce se mai poate scrie

$$\varphi(x,y)=\frac{h_1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{h_1^2}{2}x^2}\cdot\frac{h_2}{\sqrt{\pi}\sqrt{2(1-r^2)}}e^{-\frac{h_2^2}{2(1-r^2)}\left(y-r\frac{h_1}{h_2}x\right)^2}. \qquad (19)$$

Scanned with OKEN Scanner

§ 102. Coeficient de corelaţie

Observăm că expresia precedentă este reală şi finită dacă mărimea r, definită prin relaţia (13), satisface condiţia

$$-1<r<+1, \tag{20}$$

ceea ce se verifică uşor, utilizînd *identitatea lui Lagrange*

$$\sum_i x_i^2 \sum_i y_i^2 - \left(\sum_i x_i y_i\right)^2 = \sum_{ij} (x_i y_j - x_j y_i)^2 . \tag{21}$$

Ţinînd seama că x şi y reprezintă de fapt prescurtări pentru $\Delta x = x - \xi$, $\Delta y = y - \eta$, după cum am observat mai sus, şi avînd în vedere notaţiile (6) şi (7), mărimea (13) se scrie sub forma

$$r_{xy}^2 = \frac{(m_{xy})^2}{m_x^2 m_y^2} = \frac{\{\sum (x-\xi)(y-\eta)\}^2}{\sum (x-\xi)^2 \sum (y-\eta)^2} . \tag{22}$$

Această mărime poartă numele de *coeficient de corelaţie* între variabilele x şi y, coeficient pe care-l notăm, pentru prescurtare, cu r fără indici.

Pentru $r=0$, forma funcţiei (19) se reduce la expresia unei distribuţii normale pentru variabile aleatorii independente, cum este dată de formula (76), dar avînd ca parametri de precizie

$$h_1' = \frac{h_1}{\sqrt{2}}, \quad h_2' = \frac{h_2}{\sqrt{2}} . \tag{23}$$

Condiţia aceasta este realizată dacă este satisfăcută relaţia

$$\sum (x-\xi)(y-\eta) \ll \sqrt{\sum (x-\xi)^2} \sqrt{\sum (y-\eta)^2}, \tag{24}$$

care are loc în cazul erorilor întîmplătoare independente, după cum am specificat în prima parte a expunerii. Din acest fapt nu trebuie trasă însă concluzia că variabilele x şi y sînt independente, ci numai că expresia (16) devine identică cu expresia (76), valabilă pentru două variabile aleatorii independente.

Pentru $r \neq 0$, expresia (19) capătă o interpretare interesantă. Dacă fixăm o fîşie infinitezimală paralelă cu axa y, anume $(x, x+dx)$, funcţia de distribuţie a erorilor în această fîşie este reprezentată de al doilea factor din (19), factor care are aspectul unei distribuţii normale de variabilă corelată

$$z = y - r\frac{h_1}{h_2} x, \tag{25}$$

Scanned with OKEN Scanner

distribuţia avînd ca parametru de precizie

$$h' = \frac{h_2}{\sqrt{2(1-r^2)}}, \tag{26}$$

numit *parametru de precizie-tip*.

Variabila z dată de relaţia (25) exprimă abaterea valorii lui y, în fîşia infinitezimală considerată, de la valoarea $\eta = r\frac{h_1}{h_2}x$, care determină poziţia centrului de greutate al fîşiei considerate şi este egală cu valoarea medie a lui y în această fîşie. În adevăr, valoarea medie a lui y în fîşia $(x, x+dx)$ este, după (19)

$$M(y) = \frac{h'}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} y\, e^{-h'^2(y-\eta)^2}\, dy = \frac{h'}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-\eta)\, e^{-h'^2(y-\eta)^2}\, d(y-\eta) +$$

$$+\frac{h'}{\sqrt{\pi}}\eta\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h'^2(y-\eta)}\, d(y-\eta) = \eta\,.$$

Centrul de greutate descrie dreapta

$$y-\eta-r\frac{h_1}{h_2}(x-\xi)=0, \tag{27}$$

care trece prin centrul elipselor de egală probabilitate (ξ, η) şi este diametrul conjugat al coardelor paralele cu axa Oy în aceste elipse. Dreapta (27) se numeşte *dreapta de regresiune* a lui y în x. În mod analog, se poate deduce ecuaţia dreptei de regresiune a lui x în y, inversînd rolurile lui x şi y în trecerea de la forma (18) la forma (19). Obţinem, astfel, ecuaţia acestei drepte

$$x-\xi-r\frac{h_2}{h_1}(y-\eta)=0\,. \tag{28}$$

Dreptele (27) şi (28) sînt distincte între ele şi servesc în diagrama de distribuţie a erorilor pentru studiul gradului de corelaţie.

Pentru $r \approx \pm 1$, valoarea (26) a parametrului de precizie-tip devine foarte mare. Aceasta înseamnă că în vecinătatea acestei valori (ceea ce revine practic chiar la $r = \pm 1$) vom avea o *precizie maximă*, fapt important pentru orice problemă în care se pune condiţia determinărilor cu maximum de precizie, după cum vom exemplifica în problema de geodezie pe care o expunem mai jos.

Scanned with OKEN Scanner

După (22) observăm că pentru $r_{xy}=\pm 1$ trebuie să avem

$$\sum(x-\xi)(y-\eta)=\sqrt{\sum(x-\xi)^2}\cdot\sqrt{\sum(y-\eta)^2}. \tag{29}$$

Or, este uşor de verificat că această relaţie are loc în cazul în care variabilele x şi y sînt legate printr-o relaţie liniară

$$y=\alpha x+\beta. \tag{30}$$

În adevăr, aplicînd ecuaţiei precedente regulile de calcul pentru valorile medii, obţinem

$$M(y)=\alpha M(x)+\beta$$

sau, cu notaţiile adoptate,

$$\eta=\alpha\xi+\beta. \tag{31}$$

Scăzînd ecuaţia (31) din (30) deducem

$$y-\eta=\alpha(x-\xi), \tag{32}$$

de unde, prin înmulţire în ambii membri cu $x-\xi$ şi efectuarea mediei, obţinem

$$M[(x-\xi)(y-\eta)]=\alpha M[(x-\xi)^2]=\alpha m_x^2. \tag{33}$$

Pe de altă parte, ridicînd ecuaţia (31) la pătrat şi efectuînd media, deducem

$$m_y^2=M[(y-\eta)^2]=\alpha^2 M[x-\xi)^2]=\alpha^2 m_x^2,$$

deci

$$m_y=\pm\alpha m_x.$$

Introducînd în (32) valoarea lui α scoasă din ultima relaţie, rezultă egalitatea enunţată (28), sub condiţia existenţei relaţiei (29). Reciproc, din identitatea lui Lagrange (21), pentru $r=1$, adică egalitatea (28), obţinem

$$\sum_{i,j=1}^{n}(x_iy_j-x_jy_i)^2=0,$$

ceea ce conduce la condiţia

$$x_iy_j-x_jy_i=0,\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

deoarece suma pătratelor nu poate fi nulă decît dacă fiecare termen este nul; aşadar

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}=\text{const.},$$

relaţia dintre x şi y fiind deci liniară.

Scanned with OKEN Scanner

§ 103. Observaţie asupra criteriului de corelaţie

Trebuie reţinut că nu există o lege fixă după care să se stabilească în toate cazurile gradul de corelaţie şi nici structura unei corelaţii.

Totuşi, se poate afirma că coeficientul de corelaţie este unul dintre parametrii principali care definesc matematic corelaţia, ceea ce rezultă din consideraţiile precedente, avînd în vedere distribuţia normală. Putem pune şi problema inversă, în formă mai generală, precum urmează.

Fie n perechi de variabile aleatorii (x_i, y_i), $i=1, 2, \ldots, n$, admiţîndu-le cu ponderi egale. Nu facem nici o ipoteză asupra liniei de regresiune; totuşi, putem ajusta norul de puncte (x_i, y_i) după funcţiile liniare $y=ax+b$, respectiv $x=cy+d$, care, atunci cînd x şi y sînt corelate liniar, reprezintă ecuaţiile dreptei de regresiune a lui y în x, respectiv a lui x în y (a, b, c, d fiind constante).

Acest procedeu de ajustare este de fapt o operaţie de compensare cu ajutorul metodei celor mai mici pătrate, în scopul determinării constantelor a şi b din ecuaţia $y=ax+b$. Conform acestei metode, se cere ca

$$f=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-(ax_i+b)\right\}^2=\text{minimă},$$

de unde rezultă ecuaţiile de condiţie (vom vedea în capitolul următor că acestea sînt ecuaţiile normale)

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}x_i\left\{y_i-(ax_i+b)\right\}=0$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial b}=\sum_{i=1}^{n}\left\{y_i-(ax_i+b)\right\}=0,$$

ceea ce se reduce la

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}y_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb.$$

Să introducem ipoteza

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i=0,$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce înseamnă că raportăm valorile lui x_i și y_i la media lor aritmetică, care ne dă centrul de greutate al norului de puncte (x_i, y_i), unde așezăm originea sistemului de coordonate față de care reprezentăm grafic distribuția obținută. În aceste condiții, relațiile precedente se reduc la

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},\quad b=0.$$

Să normăm șirurile de valori luate de x și y, astfel încît ele să fie egal distribuite în jurul valorilor medii, ceea ce se obține prin transformarea

$$\xi_i=\frac{x_i}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}},\quad \eta_i=\frac{y_i}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n}}}.$$

Prin transformarea precedentă, ecuația $y=ax+b$, cu valorile precedente ale lui a și b, devine

$$\eta=\xi\,\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2}}.$$

În mod analog, se obține pentru ecuația $x=cy+d$ a dreptei de regresiune a lui x în y forma $\xi=r_{xy}\,\eta$.

Dacă variabilele aleatorii x și y sînt corelate, dreptele de regresiune ale variabilelor normate au forma

$$\xi=r_{xy}\,\eta,\ \text{respectiv}\ \eta=r_{xy}\,\xi,$$

unde r_{xy} este coeficientul de corelație între x și y, definit prin formula (22) scrisă sub formă mai simplă. Pentru a constata în ce măsură coeficientul de corelație indică gradul de legătură dintre variabilele considerate, calculăm suma pătratelor abaterilor, care au fost făcute minime prin ajustarea liniară. Avem, cu valorile precedente,

$$f_y=\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i)^2=\sum_{i=1}^{n} y_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}=\sum_{i=1}^{n} y_i^2(1-r_{xy}^2)$$

Scanned with OKEN Scanner

și analog

$$f_x=\sum_{i=1}^{n}(x_i-cy_i)^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\,(1-r_{xy}^2)\,.$$

Relațiile precedente ne arată că, în ambele cazuri, dispersia lui y, respectiv a lui x, în jurul dreptelor de regresiune corespunzătoare se anulează pentru $r_{xy}=\pm 1$ și că, dimpotrivă, dispersia este maximă și egală cu întreaga valoare a dispersiei necorelate față de dreptele de regresiune, pentru $r_{xy}=0$. Dar cum știm că dispersia, respectiv eroarea medie pătratică, este invers proporțională cu coeficientul de precizie, conchidem că maximul de precizie se obține pentru $r_{xy}=\pm 1$, cînd avem de-a face cu variabile aleatorii corelate și cînd, așa cum reiese din considerațiile precedente, speranța matematică parțială este o funcție liniară de variabilele respective.

§ 104. Eroarea medie pătratică a unei funcții liniare de variabile corelate

Pentru fixarea ideilor, luăm cazul unei funcții de două variabile x, y corelate

$$z=x+y.$$

Eroarea medie pătratică se calculează prin procedeul cunoscut. Formăm

$$\Delta z=\Delta x+\Delta y$$

și ridicăm la pătrat; împărțind prin numărul de observații n și sumînd, obținem

$$\frac{1}{n}\left[\Delta z^2\right]=\frac{1}{n}\left[\Delta x^2\right]+\frac{1}{n}\left[\Delta y^2\right]+\frac{2}{n}\left[\Delta x\,\Delta y\right]. \tag{33}$$

În cazul variabilelor necorelate, ultimul termen dispare și avem relația cunoscută

$$m_z^2=m_x^2+m_y^2. \tag{34}$$

În cazul variabilelor corelate, însă, ultimul termen din (33) nu mai este nul; după formula (13), se poate scrie

$$[\Delta x\,\Delta x]=r_{xy}\sqrt{[\Delta x^2]}\,\sqrt{[\Delta y^2]}\,, \tag{35}$$

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce, introdus în (33), ne dă relația fundamentală

$$m_z^2 = m_x^2 + m_y^2 + 2r_{x,y}\, m_x\, m_y\,, \tag{36}$$

relație importantă care se generalizează, evident, și pentru un număr oarecare, finit, de variabile corelate.

Putem scrie, deci, pentru un număr de N variabile corelate, formula generală

$$m_z^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i^2 + 2 \sum_{i \neq j=1}^{N} r_{ij}\, m_i\, m_j\,. \tag{37}$$

Pentru $r_{ij} = +1$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ formula precedentă devine

$$m_z^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right)^2 \tag{38}$$

sau

$$m_z = \sum_{i=1}^{N} m_i\,, \tag{39}$$

iar dacă toate erorile medii pătratice individuale sînt egale,

$$m_1 = m_2 = \cdots = m_N = m\,,$$

putem scrie

$$m_z = Nm\,, \tag{40}$$

relație importantă care, după observația de la § 102, corespunde la *maximum de precizie*. Relația (40) diferă de relația cunoscută pentru cazul cînd cele N variabile aleatorii sînt independente și pe care am stabilit-o la teoria erorilor:

$$m_z = \sqrt{N}\, m\,.$$

§ 105. O problemă referitoare la dezvoltarea unei baze geodezice cu maximum de precizie

Fie b baza măsurată cu o foarte bună precizie, astfel încît să poată fi considerată ca lipsită de eroare. Această bază se dezvoltă printr-un lanț de n triunghiuri și fie B rezultatul acestei dezvoltări. Evident că măsurătorile triunghiurilor intermediare vor fi afectate de erori. Admitem că, în afară de baza inițială care se dezvoltă succesiv, pentru determinarea triunghiurilor intermediare mai avem de măsurat două unghiuri. Din însăși construcția indicată, rezultă că aceste unghiuri sînt două mărimi variabile aleatorii corelate (prin condiția de a constitui, împreună cu latura

Scanned with OKEN Scanner

respectivă, un triunghi). Problema care se pune este, deci, de a găsi condiţia maximului de precizie în dezvoltarea bazei prin mărimi corelate.

Din consideraţiile dezvoltate în paragrafele precedente asupra mărimilor corelate, această condiţie de maxim se exprimă prin condiţia ca coeficientul de corelaţie să fie egal cu unitatea, ceea ce înseamnă că trebuie să existe o relaţie funcţională între mărimile corelate considerate, adică între unghiurile triunghiurilor intermediare de dezvoltare. Aceste consideraţii ne conduc la ideea de a lua triunghiurile intermediare *asemenea* şi, după cum vom vedea mai departe, chiar *dreptunghice*.

Fie x raportul de creştere dintre două baze consecutive; admitem că acest raport se menţine pentru toate perechile de triunghiuri consecutive, astfel încît

$$B_{i+1}=xB_i \quad (i=0, 1, 2, \cdots, n-1\,;\; B_0=b\,;\; B_n=B)\,, \qquad (41)$$

de unde, dînd lui i valorile 0, 1, 2, ..., n şi înmulţind rezultatele astfel obţinute, deducem

$$B=x^n b\,. \qquad (42)$$

Este clar că în procesul de măsurare mărimea care este afectată de erori de măsurare este chiar x, pentru măsurătorile individuale, şi

$$z=x^n=\frac{1}{\sin^n \alpha}\,, \qquad (43)$$

pentru rezultatul total al operaţiei de dezvoltare a bazei.

Fie m_z eroarea medie pătratică a lui z şi m_x eroarea medie pătratică individuală, pe care o putem lua aceeaşi pentru fiecare măsurătoare individuală.

Cum mărimea z — raportul de creştere total — este funcţie de mărimea x — raportul de creştere parţial — şi cum acest raport depinde practic de modul în care sînt măsurate cele două unghiuri necesare pentru determinarea fiecărui triunghi intermediar, este clar că valorile mărimilor x vor fi corelate. Este cazul să aplicăm deci formula (37) pentru determinarea erorii medii pătratice m_z din eroarea medie pătratică m_x individuală. Punînd însă condiţia de precizie maximă, vom avea de aplicat direct formula (40) pentru numărul n de triunghiuri, astfel încît

$$m_z=n m_x\,. \qquad (44)$$

Avînd în vedere că triunghiurile intermediare sînt dreptunghice, putem admite că baza dezvoltată este, de fiecare dată, ipotenuza

Scanned with OKEN Scanner

triunghiului respectiv. În aceste condiții, raportul de creștere parțial este

$$x=\frac{1}{\sin\alpha}, \tag{45}$$

dacă însemnăm cu α unghiul opus la baza pe care o dezvoltăm. Însemnăm cu m eroarea medie pătratică a unei măsurători unghiulare; avem

$$m_x^2=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot m^2. \tag{46}$$

Observăm că ajungem tot la această expresie dacă aplicăm formula erorilor pentru mărimi corelate, deoarece în cazul de față din relația de condiție pentru unghiuri

$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=0 \tag{47}$$

și din rezultatul compensării într-un triunghi plan, avem

$$m_\alpha^2\approx\Delta\alpha^2;\quad m_\beta^2\approx\Delta\beta^2;\quad \Delta\alpha=\Delta\beta=\Delta\gamma=\frac{\varepsilon}{3}, \tag{48}$$

dacă însemnăm cu ε discordanța dintre suma valorilor măsurate și suma valorilor exacte, anume 180°; deducem imediat pentru coeficientul de corelație

$$r_{\alpha\beta}=\frac{\Delta\alpha\,\Delta\beta}{\sqrt{\Delta\alpha^2}\sqrt{\Delta\beta^2}}=-\frac{1}{2}. \tag{49}$$

În adevăr, din (47) rezultă

$$\Delta\alpha+\Delta\beta=-\Delta\gamma,$$

și deci, prin ridicarea la pătrat și ținînd seama de (48),

$$2\,\Delta\alpha\,\Delta\beta=-\frac{1}{9}\varepsilon^2,$$

de unde rezultă imediat

$$r_{\alpha\beta}=\frac{\Delta\alpha\,\Delta\beta}{\sqrt{\Delta\alpha^2}\sqrt{\Delta\beta^2}}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{9}:\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{\varepsilon}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Ar urma, deci, să mai adăugăm la suma $m_\alpha^2+m_\beta^2$ termenul $\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{ctg}\alpha\cdot m^2$, care însă este nul în ipoteza noastră $\beta=\frac{\pi}{2}$.

Revenind la problema noastră, să luăm pentru simplificare pe m ca unitate de măsură pentru erorile unghiulare. După (44) și (47), avem

$$m_z^2=n^2\operatorname{ctg}^2\alpha=n^2\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, după (46)

$$m_z^2 = n^2 (z^{\frac{2}{n}} - 1). \tag{50}$$

Se pune problema acum să determinăm pe n astfel încît expresia precedentă să fie minimă. Derivînd expresia (50) în raport cu n obţinem

$$\frac{dm_z^2}{dn} = 2n \left\{ z^{\frac{2}{n}} \left(1 - \ln z^{\frac{1}{n}}\right) - 1 \right\}. \tag{51}$$

Să punem pentru simplificarea scrisului

$$z^{\frac{2}{n}} = e^u; \quad e^u \left(1 - \frac{u}{2}\right) - 1 = f(u). \tag{52}$$

Cu aceste notaţii, expresia (51) se scrie

$$\frac{dm_z^2}{dn} = 2n f(u). \tag{53}$$

Derivînd expresia precedentă încă odată în raport cu n, obţinem

$$\frac{d^2 m_z^2}{dn^2} = 2 f(u) + 2n f'(u) \frac{du}{dn} = 2 f(u) - \frac{2}{n} (1-u) \ln z. \tag{54}$$

A doua formulă (52) ne arată că $f(u)$ se anulează pentru $u=0$. Este uşor de constatat că această valoare corespunde unui maxim al funcţiei m_z^2. În adevăr, pentru $u=0$, valoarea (54) a derivatei a doua devine $-\frac{2}{n} \ln z < 0$. Cum funcţia (53) este descrescătoare, rezultă că în adevăr $u=0$ este un maxim pentru m_z^2.

Dar funcţia $f(u)$ mai are un zero între $u=+1$ şi $u=+2$. În adevăr,

$$f(1) = \frac{e}{2} - 1 > 0; \quad f(2) = -1 < 0.$$

Această rădăcină corespunde valorii minime a lui m_z^2, căci funcţia m_z^2 continuă să descrească de la maximul ($u=0$) pînă la rădăcina din intervalul ($+1$, $+2$), după care începe iar să crească, cum se verifică uşor. Aşadar, rădăcina ecuaţiei

$$e^u \left(1 - \frac{u}{2}\right) - 1 = 0$$

ne dă valoarea care corespunde minimului căutat pentru m_z^2. Se găseşte aproximativ

$$u = 1{,}59362.$$

Valoarea corespunzătoare a lui n se găsește aplicînd logaritmii zecimali în formula (52); obținem, însemnînd cu M modulul de transformare al logaritmilor

$$\lg z = \frac{M}{2} nu = 0{,}34605\, n,$$

relație care rezolvă problema. Din relația (43) deducem unghiul opus laturilor mărite succesiv

$$\lg \sin \alpha = -\lg z^{\frac{1}{n}} = -\frac{u}{2} u = \frac{1}{n} \operatorname{colg} z = \bar{1}{,}65394,$$

ceea ce ne dă

$$\alpha = 26°47'30'',$$

valoare care convine să fie adoptată pentru unghiul α.

III. METODA CELOR MAI MICI PĂTRATE

§ 106. Principiul metodei şi scopul ei

În prima parte a acestei expuneri am introdus principiul de minim, care ne conduce la metoda celor mai mici pătrate, fără a-i da însă o justificare teoretică, mărginindu-ne să arătăm că cea mai bună valoare pentru o mărime pentru care s-a obţinut prin măsurători un şir de valori este condiţionată de minimul sumei pătratelor erorilor, luate faţă de o mărime de referinţă care este tocmai cea căutată (§ 17).

O justificare teoretică a acestui criteriu se deduce prin considerarea rezultatelor obţinute în aplicarea teoriei probabilităţilor la calculul erorilor de măsurare. Această justificare ne conduce la dezvoltarea metodei de calcul al compensărilor datelor experimentale în aşa mod, ca acestea să fie aduse în cît mai bună concordanţă cu valoarea reală căutată, pentru o mărime dată. Prin aceasta, metoda celor mai mici pătrate se ocupă cu compensarea erorilor de măsurare şi cu determinarea erorilor medii la care ne putem aştepta într-o astfel de operaţie practică. În acest mod, determinăm precizia măsurătorilor, cînd acestea sînt în număr suficient de mare faţă de numărul mărimilor pe care le avem de determinat.

Metoda celor mai mici pătrate, ca metodă de prelucrare a măsurătorilor, a fost folosită în cele mai vechi ştiinţe care au la bază măsurătoarea, anume astronomia şi geodezia. Metoda a fost descoperită de *Gauss* în 1794 şi a căpătat o mare dezvoltare după aplicarea ei în practica geodezică de către *Bessel*. Această metodă constituie un accesoriu indispensabil pentru orice operator geodez, topograf, astronom, tehnician de precizie etc.

§ 107. Ecuaţiile erorilor

Fie n mărimi *independente*

$$X_1, X_2, \cdots, X_n,$$

pentru care, prin măsurători *directe*, obţinem valorile

$$x_1, x_2, \cdots, x_n.$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă aceste mărimi ar fi valorile exacte pe care le căutăm, am avea

$$x_1 = X_1\,,\quad x_2 = X_2\,,\quad \cdots,\quad x_n = X_n\,,$$

ceea ce, evident, nu se realizează în practică, deoarece determinările valorilor x_i sînt, inevitabil, afectate de erori. Presupunînd eliminate erorile sistematice şi greşelile şi mărginindu-ne deci numai la erorile întîmplătoare, problema care se pune este să determinăm cele mai probabile valori x_i, pentru care erorile medii pătratice să fie cît mai mici.

Adeseori, în practică, este nu numai incomod, dar chiar imposibil să se determine *direct* valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$; se determină experimental numai nişte funcţii de acestea, astfel încît avem de-a face cu determinări *indirecte*. Fie, aşadar,

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ \xi_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \xi_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

un număr de m mărimi determinate direct. Problema care se pune este ca din aceste date (1) să deducem cele mai bune valori pentru mărimile $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Observăm că avem întotdeauna $m > n$, căci avem totdeauna posibilitatea să mărim numărul de măsurători, m, în scopul de a obţine, conform principiului metodei, cele mai bune rezultate.

Admitem că alte condiţii suplimentare la care ar urma să satisfacă necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nu avem. Mai tîrziu vom trata şi acest caz, de-altfel deosebit de important, după cum vom vedea în dezvoltările care urmează.

Dacă valorile $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$ ar fi perfect riguroase, sistemul (1) ar fi compatibil şi rezolvabil în raport cu necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$; în acest caz, ecuaţiile suplimentare în număr de $(m-n)$ ar fi simple consecinţe ale celorlalte n, iar operaţiile de măsurare s-ar reduce la atîtea cîte necunoscute sînt, ceea ce ştim că nu se poate realiza în practică, cu oricîtă grijă şi pricepere şi în oricît de bune condiţii s-ar efectua determinările experimentale. De aceea, sistemul (1) se înlocuieşte cu aşa-numitul sistem al *ecuaţiilor erorilor*

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \xi_1 &= \varepsilon_1\\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \xi_2 &= \varepsilon_2\\ &\cdots\cdots\cdots\\ f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \xi_m &= \varepsilon_m\,, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

unde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ sînt corecţiile care trebuie aplicate pentru a transforma sistemul incompatibil (1) într-un sistem compatibil în necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

După teoria distribuţiei normale, probabilitatea ca erorile de măsurare să fie exact egale, sau cît mai exact egale posibil, cu corecţiile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$, şi anume să fie cuprinse respectiv în intervalele

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_1 + d\varepsilon_1); (\varepsilon_2, \varepsilon_2 + d\varepsilon_2); \cdots; (\varepsilon_m, \varepsilon_m + d\varepsilon_m),$$

este proporţională cu funcţia de densitate

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m) = \frac{h_1 h_2 \cdots h_m}{(\sqrt{\pi})^m} e^{-(h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + h_m^2\varepsilon_m^2)}, \qquad (3)$$

întrucît am presupus că valorile $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$, respectiv corecţiile $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$, sînt independente.

Această probabilitate este maximă dacă exponentul funcţiei exponenţiale (3) este minim; deci maximul de probabilitate se obţine pentru minimul expresiei

$$S = h_1^2\varepsilon_1^2 + h_2^2\varepsilon_2^2 + \cdots + h_m^2\varepsilon_m^2 \qquad (4)$$

sau, ceea ce este tot una, după § 93, cu

$$S = p_1\varepsilon_1^2 + p_2\varepsilon_2^2 + \cdots + p_m\varepsilon_m^2 . \qquad (5)$$

Este evident că, în cazul măsurătorilor perfecte, suma (4) respectiv (5), ar trebui să fie nulă, ceea ce nu se poate realiza în practică, după cum ştim, căci aceasta ar însemna ca toţi ε_i să fie nuli, deoarece S este o formă pătratică pozitiv definită; sistemul (1) ar fi atunci compatibil. Ne mărginim aşadar la condiţia mai puţin restrictivă a găsirii unei valori minime a lui S, care să asigure *cele mai probabile valori* pentru variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Dar, dacă în expresia lui S înlocuim toţi ε_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ prin valorile date de sistemul (2), putem considera această sumă ca funcţie de variabilele x_i.

Făcînd această substituţie, se obţine pentru (5) expresia

$$S(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{m} p_i \{f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) - \xi_i\}^2. \qquad (6)$$

Din analiza matematică se ştie că valorile minime (sau maxime) ale funcţiei (6) sînt soluţiile sistemului obţinut prin egalarea cu

zero a derivatelor parţiale ale lui S în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Cum nu poate fi vorba de un maxim, care este evident obţinut pentru $\varepsilon_i = +\infty$, sîntem siguri că vom determina astfel un minim efectiv.

Aşadar, această condiţie se exprimă prin sistemul de ecuaţii

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}=0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2}=0, \cdots, \quad \frac{\partial S}{\partial x_n}=0. \tag{7}$$

Observăm că numărul ecuaţiilor (7) deduse din (2), respectiv (6), este exact egal cu numărul n al necunoscutelor; ele ne permit deci determinarea prin calcul a valorilor lui $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Conchidem că sistemul valorilor adoptate pentru variabilele respective, ca fiind cele mai probabile, este sistemul care face minimă suma pătratelor erorilor directe (2) ale măsurătorilor, înmulţite respectiv prin ponderile acestor determinări experimentale.

Aceasta constituie principiul metodei celor mai mici pătrate, justificat prin consideraţii teoretice asupra distribuţiei normale.

Dacă funcţiile $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, care reprezintă fenomenul fizic, sînt de formă oarecare, metoda celor mai mici pătrate nu poate fi aplicată, după cum vom constata, căci această metodă este construită pentru funcţii f_i care sînt *forme liniare* de variabile, sau care se pot reduce la astfel de forme, de exemplu prin logaritmare. De altfel, chiar şi chestiunile puse de practică şi care conduc la metoda de rezolvare descrisă se mărginesc numai la forme liniare ale funcţiilor f_i în ecuaţiile erorilor.

§ 108. Reducerea funcţiilor f la forma liniară

Din însăşi natura problemei pusă de practică rezultă că prin măsurători se obţin valori aproximative fie pentru $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dacă ele sînt măsurate direct, fie pentru $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ dacă *aceste* mărimi sînt măsurate direct, iar în acest caz, sistemul de ecuaţii (1) ne va da ca soluţie un grup de valori aproximative pentru necunoscute, anume $x_1', x_2', \cdots, x_n'$, valori care diferă de valorile exacte prin cîtimi foarte mici, astfel încît

$$x_1 = x_1' + \alpha_1, \quad x_2 = x_2' + \alpha_2, \cdots, x_n = x_n' + \alpha_n, \tag{8}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ trebuie să fie foarte mici întrucît numai în acest caz se poate vorbi de măsurători executate în bune condiţii,

Scanned with OKEN Scanner

aşa cum cere problema pusă. Această împrejurare, inerentă problemei, permite reducerea funcţiilor f_i la forma liniară, admiţînd că termenii pătratici în α_i, care apar în dezvoltarea funcţiei f_i, pot fi neglijaţi faţă de termenii liniari; acest lucru este în adevăr justificat chiar în determinările de mare precizie, puse în geodezie şi celelalte ştiinţe care folosesc metoda celor mai mici pătrate.

Fie

$$\eta_i = f_i(x_1', x_2', \cdots, x_n') \tag{9}$$

valoarea funcţiei f_i pentru valorile determinate experimental. Să dezvoltăm în serie Taylor funcţia f_i $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; avem

$$f_i(x_1'+\alpha_1, x_2'+\alpha_2, \cdots, x_n'+\alpha_n) = f_i(x_1', x_2', \cdots, x_n') +$$

$$+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \alpha_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \alpha_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 \alpha_n + O(\alpha^2), \tag{10}$$

unde indicele zero înseamnă că în expresiile respective înlocuim pe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin valorile aproximative $x_1', x_2', \cdots, x_n'$; aceste mărimi vor fi atunci valori cunoscute, pe care le notăm cu

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 = a_{i1}, \quad \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 = a_{i2}, \cdots, \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0 = a_{in}; \tag{11}$$

simbolul $O(\alpha^2)$ însemnează „termeni de ordinul lui α^2", termeni pe care, după cele spuse mai sus, îi neglijăm în expresia (10), astfel încît putem scrie, cu notaţiile (11)

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \eta_i + a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n, \tag{12}$$

funcţia iniţială de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ devenind o funcţie de noile variabile $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, care sînt chiar corecţiile care trebuie determinate pentru rezolvarea problemei propuse, de compensare a valorilor măsurate spre a obţine valorile cele mai probabile pentru mărimile considerate.

În aceste condiţii, suma (6) devine

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{m} p_i (a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \cdots + a_{in}\alpha_n + \eta_i - \xi_i)^2, \tag{13}$$

unde am notat cu α_i diferenţele $\Delta x_i = x_i - x_i'$, definite de relaţiile (8).

Scanned with OKEN Scanner

§ 109. Sistemul ecuațiilor normale

Ecuațiile (7), cu expresia (13) a sumei S ca funcție de diferențele α_i, devin

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}=\sum_{i=1}^{m} a_{i1}\,p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_j+r_{il}-\xi_i\right)=0\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}=\sum_{i=1}^{m} a_{i2}\,p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_j+r_{il}-\xi_i\right)=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \alpha_n}=\sum_{i=1}^{m} a_{im}\,p_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha_j+r_{il}-\xi_i\right)=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Sistemul precedent se numește sistemul de *ecuații normale*. El permite determinarea celor n necunoscute prin n (totalitatea) ecuații, reducînd astfel supraabundența de ecuații ale erorilor. Tocmai construirea ecuațiilor (14), formînd un sistem de tot atîtea ecuații cîte necunoscute sînt, din sistemul de ecuații supraabundente, sub condiția (13), constituie esența metodei celor mai mici pătrate.

§ 110. Dezvoltarea calculului pentru trei necunoscute. Formarea ecuațiilor normale

Pentru a concretiza ideile și pentru a evidenția mersul calculului într-o problemă practică, vom considera cazul a *trei* necunoscute, între care există un număr oarecare n de ecuații de erori. Pentru uniformizarea notațiilor, vom scrie x, y, z, ... în loc de α_1, α_2, α_3, ... Ecuațiile erorilor pot fi scrise în forma unui sistem de n ecuații liniare cu trei necunoscute

$$\left.\begin{aligned}
&a_1x+b_1y+c_1z+d_1-\xi_1=v_1\\
&a_2x+b_2y+c_2z+d_2-\xi_2=v_2\\
&a_3x+b_3y+c_3z+d_3-\xi_3=v_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_nx+b_ny+c_nz+d_n-\xi_n=v_n,
\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

unde a, b, c, d sînt constante date de problema însăși, iar ξ_1, ξ_2, ξ_3, ..., ξ_n, sînt mărimi determinate experimental, pe care le considerăm ca exprimînd valorile medii respective, astfel încît v_1, v_2, v_3, ..., v_n vor fi erorile aparente. Făcînd notațiile

$$d_1-\xi_1=l_1,\ d_2-\xi_2=l_2,\ \ldots,\ d_n-\xi_n=l_n, \qquad (16)$$

Scanned with OKEN Scanner

sistemul (15) se scrie

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+l_1&=v_1\\ a_2x+b_2y+c_2z+l_2&=v_2\\ a_3x+b_3y+c_3z+l_3&=v_3\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot&\\ a_nx+b_ny+c_nz+l_n&=v_n. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Observăm că numărul n de ecuații poate fi ales mult mai mare decît numărul necunoscutelor, dat fiind că avem posibilitatea să efectuăm un număr convenabil de măsurători, ceea ce este necesar pentru ca metoda celor mai mici pătrate să ne dea cele mai bune rezultate.

În conformitate cu metoda celor mai mici pătrate, valorile cele mai probabile ale necunoscutelor sînt acelea pentru care suma pătratelor erorilor este minimă

$$[v\,v]=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\cdots+v_n^2=\text{minimă}, \qquad (18)$$

ceea ce revine, cu expresiile (17), la

$$S(x,y,z)=(a_1x+b_1y+c_1z+l_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2z+l_2)^2+ \\ +\cdots+(a_nx+b_ny+c_nz+l_n)^2=\text{minimă}. \qquad (19)$$

Cu funcția (19), ecuațiile normale definite prin sistemul (14) se scriu

$$\frac{1}{2}S'_x(x,y,z)=a_1(a_1x+b_1y+c_1z+l_1)+a_2(a_2x+b_2y+c_2z+l_2)+ \\ +\cdots+a_n(a_nx+b_ny+c_nz+l_n)=0$$

$$\frac{1}{2}S'_y(x,y,z)=b_1(a_1x+b_1y+c_1z+l_1)+b_2(a_2x+b_2y+c_2z+l_2)+ \\ +\cdots+b_n(a_nx+b_ny+c_nz+l_n)=0$$

$$\frac{1}{2}S'_z(x,y,z)=c_1(a_1x+b_1y+c_1z+l_1)+c_2(a_2x+b_2y+c_2z+l_2)+ \\ +\cdots+c_n(a_nx+b_ny+c_nz+l_n)=0.$$

Aceste ecuații se scriu într-o formă restrînsă, cu ajutorul unui algoritm introdus de Gauss, precum urmează

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]&=0\\ [ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bl]&=0\\ [ac]\,x[+bc]\,y+[cc]\,z+[cl]&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde s-a notat

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\,\alpha]&=\alpha_1\alpha_1+\alpha_2\alpha_2+\cdots+\alpha_n\alpha_n\\ [\alpha\,\beta]&=[\beta\,\alpha]=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_n\beta_n,\end{aligned}\right\}\qquad(21)$$

luînd succesiv $\alpha=a,\ b,\ c,\ l$ și $\beta=a,\ b,\ c,\ l$ pentru a obține parantezele care figurează în (20). Această notație s-a dovedit foarte comodă prin simetria ei și posibilitatea formării algoritmilor succesivi în cursul rezolvării sistemului (20), cu păstrarea simetriei, după cum vom vedea. Se obișnuiește a se scrie $\alpha\alpha$ în loc de α^2, pentru menținerea uniformității simbolurilor lui Gauss.

Utilizîndu-se simetria evidentă a coeficienților necunoscutelor față de diagonală, pentru simplificarea scrisului se scriu ecuațiile normale (20) și sub forma pe care o arătăm mai jos, fiind întîlnită în foarte multe lucrări de specialitate

$$\left.\begin{aligned}\underline{[aa]}\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]&=0\\ \underline{[bb]}\,y+[bc]\,z+[bl]&=0\\ \underline{[cc]}\,z+[cl]&=0,\\ \underline{[ll]}&\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

indicîndu-se prin subliniere faptul că termenii precedenți posedă un coeficient simetric față de termenii subliniați, care formează diagonala sistemului de ecuații normale considerat; termenul $[ll]$ este necesar pentru calculul sumei $[vv]$, după cum vom arăta în § 113.

Dacă înmulțim în sistemul (17) succesiv cu $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ și adunăm rezultatele, apoi cu $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ și în sfîrșit cu $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ și dacă ținem seama de ecuațiile normale (20), rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned}a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n&=[a\,v]=0\\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n&=[b\,v]=0\\ c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n&=[c\,v]=0,\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

relații care nu exprimă altceva decît cunoscutele proprietăți ale erorilor aparente v. De fapt, aceste ecuații sînt o altă formă a ecuațiilor normale, ceea ce decurge din însuși modul de formare a lor.

§ 111. Rezolvarea ecuațiilor normale. Metoda lui Gauss

Deoarece ecuațiile normale, prin însuși modul lor de alcătuire, constituie un sistem compatibil de tot atîtea ecuații liniare cîte necunoscute sînt, este evident că, în principiu, acest sistem se poate

Scanned with OKEN Scanner

rezolva prin una dintre metodele cunoscute din algebră, de exemplu metoda determinanţilor, care se aplică uneori în rezolvarea ecuaţiilor normale, atunci cînd coeficienţii necunoscutelor nu sînt numere cu prea multe cifre şi cînd nu sînt prea multe necunoscute.

Gauss a imaginat o metodă prin eliminare, folosind un sistem de algoritmi simetrici şi uşor de construit pe măsură ce avansează eliminarea necunoscutelor. Metoda este în deosebi eficace cînd numărul ecuaţiilor nu este prea mare; pentru acest caz s-au imaginat unele metode care simplifică metoda iniţială dată de Gauss.

Metoda eliminării dată de Gauss constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor, fără a se admite înmulţirea sau împărţirea în ambii membri ai fiecărei ecuaţii cu un număr arbitrar, cu excepţia coeficientului necunoscutei care trebuie eliminată, pentru a se păstra simetria în aranjamentul coeficienţilor, precum şi comutativitatea elementelor care alcătuiesc coeficienţii [v. formulele (21)]. Arătăm, mai întîi, cum se efectuează eliminarea necunoscutelor şi apoi vom formula regula de alcătuire a coeficienţilor succesivi.

Considerăm, prin urmare, sistemul de ecuaţii normale (20). Să eliminăm mai întîi necunoscuta x. În acest scop, înmulţim în prima ecuaţie (20) cu

$$-\frac{[ab]}{[aa]} \text{ respectiv cu } -\frac{[ac]}{[aa]},$$

şi adunăm rezultatele cu a doua ecuaţie (20), respectiv cu a treia ecuaţie (20). Obţinem astfel, după eliminarea variabilei x

$$\left.\begin{aligned}\left([bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)z+\left([bl]-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}\right)=0\\ \left([bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}\right)z+\left([cl]-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}\right)=0\,.\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Se introduc notaţiile care păstrează simetria

$$\left.\begin{aligned}&[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}=[bb\cdot 1],\quad [cc]-\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}=[cc\cdot 1],\\ &[bc]-\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}=[bc\cdot 1],\quad [cl]-\frac{[ac]\,[ab]}{[aa]}=[cl\cdot 1],\\ &[bl]-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}=[bl\cdot 1]\,.\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

Cu aceste notaţii, sistemul (24) ia forma simplă

$$\left.\begin{aligned}[bb\cdot 1]\,y+[bc\cdot 1]\,z+[bl\cdot 1]=0\\ [bc\cdot 1]\,y+[cc\cdot 1]\,z+[cl\cdot 1]=0\,,\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Scanned with OKEN Scanner

care constituie sistemul de ecuații *după prima eliminare*. Ele conțin o necunoscută mai puțin și își păstrează simetria coeficienților. Mai mult, vom arăta că regula de formare a coeficienților este foarte simplă și se aplică fără dificultate direct din schema inițială a coeficienților.

În continuare, eliminarea necunoscutelor y se face în mod analog. Înmulțim în prima ecuație (26) prin

$$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$$

și adunăm rezultatul cu a doua ecuație (26); obținem ecuația

$$\left([cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)z+\left([cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right)=0 \qquad (27)$$

sau cu notația consecventă

$$\left.\begin{aligned}[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}&=[cc\cdot 2]\\ [cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}&=[cl\cdot 2],\end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

ecuația (27) devine

$$[cc\cdot 2]\,z+[cl\cdot 2]=0 \qquad (29)$$

care constituie rezultatul celei de-a *doua eliminări*. Din (29) obținem imediat

$$z=-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \qquad (30)$$

și, prin aceasta, problema este rezolvată. În adevăr, înlocuind valoarea (30) în una dintre ecuațiile (26) vom avea pe y; apoi, înlocuind pe z și y cu valorile astfel găsite în una dintre ecuațiile (20) îl determinăm și pe x. Este evident că procedeul descris mai sus se poate extinde la un număr oarecare de necunoscute. Soluția ultimei eliminări se scrie direct formînd algoritmul corespunzător, fără a mai fi nevoie de a se relua întreg calculul de eliminări. Acesta este avantajul metodei lui Gauss. Mai mult, metoda nu se aplică drept un procedeu de calcul algebric, deoarece algoritmii succesivi sînt formați direct din numerele care exprimă coeficienții ce figurează în ecuațiile erorilor.

În ceea ce privește legea de formare a algoritmilor succesivi, observăm că semnificația numerelor 1, 2, 3, ... constituie indicarea literelor care figurează drept coeficienți, în ordinea a, b, c. Aici trebuie observat, și aceasta *este foarte important*, că ordonarea șirului (1, 2, 3, ...) cu șirul (a, b, c, ...) este de fapt o ordonare

a şirului de numere (1, 2, 3, ...) cu şirul de litere care figurează în coloana 1 (litera a), coloana 2 (b), coloana 3 (c) etc., care figurează în ecuaţiile erorilor. Dacă se schimbă aranjamentul ecuaţiilor sau al termenilor din ecuaţii, corespondenţa între numerele 1, 2, 3, ... şi literele a, b, c, ... trebuie fixată de fiecare dată conform regulii enunţate anterior. Un astfel de caz vom întîlni mai tîrziu (§ 113).

Pentru ecuaţiile normale (20), schema următoare indică regula de formare a algoritmilor succesivi

$$[bc\cdot 1] = [b\ \ c] - \frac{[ab]\ \ [ac]}{[a\ \ a]}, \tag{31}$$

$$[cl\cdot 2] = [c\ \ l\cdot 1] - \frac{[bc\cdot 1]\ \ [bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \tag{32}$$

etc.

Regulă. Scriem mai întîi algoritmul anterior format din aceleaşi litere, dar cu un număr mai puţin, convenind ca în loc de $[bc\cdot 0]$ să scriem $[bc]$, cum se obişnuieşte în coeficienţii ecuaţiilor normale. Apoi, urmează semnul minus şi o linie de fracţie; la numitor figurează algoritmul anterior format din cifra care corespunde numărului, repetată de două ori: în (31) lui 1 din membrul întîi îi corespunde a, care figurează la numitorul din membrul al doilea sub forma $[aa]$; apoi, fiecare a se înmulţeşte cu b, respectiv c, cum arată săgeţile, şi se trece rezultatul la numărător; în mod analog, se construieşte algoritmul următor (32), ţinînd seama că anteriorul său are cifra 1; diagrama (32) arată modul de alcătuire. La fel se procedează cînd sînt mai multe necunoscute, putîndu-se alcătui algoritmii succesivi, ceea ce constituie avantajul metodei lui Gauss.

Calculele numerice sînt destul de greoaie şi necesită înmulţiri şi împărţiri de numere cu multe cifre. Acestea se efectuau înainte vreme prin aplicarea logaritmilor. În lucrările moderne, aceste calcule se execută cu ajutorul maşinilor de calculat manuale sau electrice.

Scanned with OKEN Scanner

§ 112. Calcule de control pentru stabilirea şi rezolvarea ecuaţiilor normale

Aceste calcule de control sînt necesare mai ales cînd numărul de măsurători este mare. În acest scop, se întocmesc, în prealabil, scheme pentru calculul coeficienţilor şi al celorlalţi parametri care permit rezolvarea ecuaţiilor normale după ce ne-am asigurat de corectitudinea alcătuirii lor.

Schema de control pentru calculul coeficienţilor ecuaţiei normale precum şi ai ecuaţiilor obţinute prin eliminări succesive în vederea rezolvării, pe care o redăm în tabela 1, trebuie să conţină în locurile indicate valorile numerice ale coeficienţilor respectivi.

Schema Gauss I. Schemă de control pentru cazul în care avem trei variabile (tabela 1).

În schemă s-au introdus sumele de control pe linii

$$\left.\begin{aligned} &a_1+b_1+c_1+l_1=s_1\\ &a_2+b_2+c_2+l_2=s_2\\ &a_3+b_3+c_3+l_3=s_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &a_n+b_n+c_n+l_n=s_n\\ &[a]+[b]+[c]+[l]=[s]. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_1a_1+a_1b_1+a_1c_1+a_1l_1=a_1s_1\\ &a_2a_2+a_2b_2+a_2c_2+a_2l_2=a_2s_2\\ &a_3a_3+a_3b_3+a_3c_3+a_3l_3=a_3s_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &a_na_n+a_nb_n+a_nc_n+a_nl_n=a_ns_n\\ &[aa]+[ab]+[ac]+[al]=[as]. \end{aligned}\right\} \qquad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} &a_1b_1+b_1b_1+b_1c_1+b_1l_1=b_1s_1\\ &a_2b_2+b_2b_2+b_2c_2+b_2l_2=b_2s_2\\ &a_3b_3+b_3b_3+b_3c_3+b_3l_3=b_3s_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &a_nb_n+b_nb_n+b_nc_n+b_nl_n=b_ns_n\\ &[ab]+[bb]+[bc]+[bl]=[bs]. \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nr.	a	b	c	l	s	aa	ab	ac	al	as	bb	bc	bl	bs	cc	cl	cs	ll	ls	ss
1	a_1	b_1	c_1	l_1	s_1	a_1a_1	a_1b_1	a_1c_1	a_1l_1	a_1s_1	b_1b_1	b_1c_1	b_1l_1	b_1s_1	c_1c_1	c_1l_1	c_1s_1	l_1l_1	l_1s_1	s_1s_1
2	a_2	b_2	c_2	l_2	s_2	a_2a_2	a_2b_2	a_2c_2	a_2l_2	a_2s_2	b_2b_2	b_2c_2	b_2l_2	b_2s_2	c_2c_2	c_2l_2	c_2s_2	l_2l_2	l_2s_2	s_2s_2
3	a_3	b_3	c_3	l_3	s_3	a_3a_3	a_3b_3	a_3c_3	a_3l_3	a_3s_3	b_3b_3	b_3c_3	b_3l_3	b_3s_3	c_3c_3	c_3l_3	c_3s_3	l_3l_3	l_3s_3	s_3s_3
n	a_n	b_n	c_n	l_n	s_n	a_na_n	a_nb_n	a_nc_n	a_nl_n	a_ns_n	b_nb_n	b_nc_n	b_nl_n	b_ns_n	c_nc_n	c_nl_n	c_ns_n	l_nl_n	l_ns_n	s_ns_n
	$[a]$	$[b]$	$[c]$	$[l]$	$[s]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	$[bb]$	$[bc[$	$[bl]$	$[bs]$	$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	$[ll]$	$[ls]$	$[ss]$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left.\begin{aligned}
&a_1c_1 + b_1c_1 + c_1c_1 + c_1l_1 = c_1s_1\\
&a_2c_2 + b_2c_2 + c_2c_2 + c_2l_2 = c_2s_2\\
&a_3c_3 + b_3c_3 + c_3c_3 + c_3l_3 = c_3s_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_nc_n + b_nc_n + c_nc_n + c_nl_n = c_ns_n\\
&[ac] + [bc] + [cc] + [cl] = [cs].
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1l_1 + b_1l_1 + c_1l_1 + l_1l_1 = l_1s_1\\
&a_2l_2 + b_2l_2 + c_2l_2 + l_2l_2 = l_2s_2\\
&a_3l_3 + b_3l_3 + c_3l_3 + l_3l_3 = l_3s_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_nl_n + b_nl_n + c_nl_n + l_nl_n = l_ns_n\\
&[al] + [bl] + [cl] + [ll] = [ls].
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1s_1 + b_1s_1 + c_1s_1 + l_1s_1 = s_1s_1\\
&a_2s_2 + b_2s_2 + c_2s_2 + l_2s_2 = s_2s_2\\
&a_3s_3 + b_3s_3 + c_3s_3 + l_3s_3 = s_3s_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_ns_n + b_ns_n + c_ns_n + l_ns_n = s_ns_n\\
&[as] + [bs] + [cs] + [ls] = [ss].
\end{aligned}\right\} \quad (38)$$

Schema I şi relaţiile (33)—(38) sînt suficiente pentru formarea ecuaţiilor normale şi controlul coeficienţilor. Dacă acest control a dus la un rezultat corect, urmează alcătuirea ecuaţiilor care rezultă după prima eliminare, respectiv a coeficienţilor acestor ecuaţii, pentru care ne este de folos schema I. Ca relaţii de control pentru aceşti coeficienţi avem

$$\left.\begin{aligned}
&[bb\cdot 1] + [bc\cdot 1] + [bl\cdot 1] = [bs\cdot 1]\\
&[bc\cdot 1] + [cc\cdot 1] + [cl\cdot 1] = [cs\cdot 1]\\
&[bl\cdot 1] + [cl\cdot 1] + [ll\cdot 1] = [ls\cdot 1]\\
&[bs\cdot 1] + [cs\cdot 1] + [ls\cdot 1] = [ss\cdot 1],
\end{aligned}\right\} \quad (39)$$

unde şi simbolurile care figurează în membrii ai doilea ai acestor relaţii se formează după regula cunoscută (31).

Dacă şi acest control a dus la un rezultat corect, formăm ecuaţiile după a doua eliminare. Pentru coeficienţii respectivi avem relaţiile de condiţie

$$\left.\begin{aligned}
&[cc\cdot 2] + [cl\cdot 2] = [cs\cdot 2]\\
&[cl\cdot 2] + [ll\cdot 2] = [ls\cdot 2]\\
&[cs\cdot 2] + [ls\cdot 2] = [ss\cdot 2],
\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

simbolurile fiind formate după regula (32).

Scanned with OKEN Scanner

După a treia transformare (în cazul nostru, avînd *trei* necunoscute, este ultima), trebuie să avem pentru control

$$[ll \cdot 3] = [ls \cdot 3],$$
$$[ls \cdot 3] = [ss \cdot 3],$$

de unde rezultă

$$[ll \cdot 3] = [ls \cdot 3] = [ss \cdot 3]. \tag{41}$$

Este evident că metoda dezvoltată mai sus și formulele precedente se extind la un număr oarecare, finit, de variabile și ecuații. Pentru un număr foarte mare de ecuații se introduc unele scheme ceva mai simplificate, pentru ușurința calculului.

§ 113. Determinarea ponderilor și erorilor medii pătratice ale valorilor necunoscutelor obținute prin rezolvarea ecuațiilor normale

Fie m eroarea medie pătratică a valorilor obținute prin măsurătoare, adică a lui $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, admițînd că toate aceste valori se determină cu egală precizie. Fie m_x eroarea medie pătratică individuală a variabilei x dedusă prin rezolvarea ecuațiilor normale.

Luăm ca unitate de pondere, ponderea măsurătorilor directe, corespunzătoare erorii medii pătratice m. După teorema cunoscută, însemnînd cu P_x ponderea corespunzătoare lui m_x, avem

$$\frac{P_x}{1} = \frac{m^2}{m_x^2}, \quad \text{deci} \quad m_x = \frac{m}{\sqrt{P_x}} \tag{42}$$

Pentru rezolvarea acestei probleme vom întrebuința metoda coeficienților nedeterminați, care apoi ne va ușura aplicarea metodei lui Gauss.

Metoda coeficienților nedeterminați. Ne restrîngem, pentru fixarea ideilor, la cazul a trei variabile, pentru care am format sistemul de ecuații normale (20) (v. § 111)

$$\left.\begin{aligned} [aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0 \\ [ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= 0 \\ [ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Înmulțim în ecuațiile precedente succesiv cu Q_1, Q_2, Q_3 și apoi le adunăm; obținem

$$\begin{aligned} &([aa]Q_1 + [ab]Q_2 + [ac]Q_3)x + ([ab]Q_1 + [bb]Q_2 + [bc]Q_3)y + \\ &+ ([ac]Q_1 + [bc]Q_2 + [cc]Q_3)z + ([al]Q_1 + [bl]Q_2 + [cl]Q_3) = 0. \end{aligned} \tag{44}$$

Scanned with OKEN Scanner

În general, numărul coeficienților nedeterminați este egal cu numărul necunoscutelor. Metoda constă în determinarea coeficienților Q, astfel încît coeficienții tuturor necunoscutelor din ecuația (44) să fie nuli, cu excepția coeficientului uneia dintre necunoscute, anume al necunoscutei a cărei pondere voim s-o aflăm.

Observăm că termenul liber din ecuația (44) nu trebuie egalat cu zero, căci am obține o supraabundență de ecuații pentru Q.

Coeficientul necunoscutei a cărei pondere voim s-o aflăm îl egalăm cu unitatea. Să tratăm cazul necunoscutei x, indicînd aceasta prin indicele x. Avem

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{1x}+[ab]\,Q_{2x}+[ac]\,Q_{3x}&=1\\ [ab]\,Q_{1x}+[bb]\,Q_{2x}+[bc]\,Q_{3x}&=0\\ [ac]\,Q_{1x}+[bc]\,Q_{2x}+[cc]\,Q_{3x}&=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Compararea sistemului precedent cu sistemul (43) ne arată că ecuațiile coeficienților Q se construiesc întocmai ca și ecuațiile normale (43), cu excepția termenilor liberi și, evident, înlocuindu-se necunoscutele x, y, z prin mărimile Q_1, Q_2, Q_3, care sînt astfel considerate ca noi necunoscute. Ne ocupăm în primul rînd de coeficientul Q_{1x}.

Dacă introducem valorile (45) în ecuația (44) obținem

$$x+[al]\,Q_{1x}+[bl]\,Q_{2x}+[cl]\,Q_{3x}=0 \tag{46}$$

sau, dezvoltat

$$x+(a_1l_1+a_2l_2+\cdots+a_nl_n)\,Q_{1x}+(b_1l_1+b_2l_2+\cdots+b_nl_n)\,Q_{2x}+ \\ +(c_1l_1+c_2l_2+\cdots+c_nl_n)\,Q_{3x}=0\,,$$

ceea ce se mai poate scrie, ordonînd după parametrii $l_1, l_2, \ldots, l_n$

$$x+(a_1Q_{1x}+b_1Q_{2x}+c_1Q_{3x})\,l_1+(a_2Q_{1x}+b_2Q_{2x}+c_2Q_{3x})\,l_2+\cdots+ \\ +(a_nQ_{1x}+b_nQ_{2x}+c_nQ_{3x})\,l_n=0$$

sau într-o formă mai restrînsă și rezolvată în raport cu x

$$x=-(\alpha_1l_1+\alpha_2l_2+\cdots+\alpha_nl_n)\,, \tag{47}$$

unde am pus

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1&=a_1Q_{1x}+b_1Q_{2x}+c_1Q_{3x}\\ \alpha_2&=a_2Q_{1x}+b_2Q_{2x}+c_2Q_{3x}\\ \alpha_3&=a_3Q_{1x}+b_3Q_{2x}+c_3Q_{3x}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_n&=a_nQ_{1x}+b_nQ_{2x}+c_nQ_{3x}\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă înmulţim în ecuaţiile (48) succesiv cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ şi apoi adunăm rezultatele, obţinem, avînd în vedere ecuaţiile (45),

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n=[a\,\alpha]=1. \tag{49}$$

În mod analog, prin înmulţire cu $b_1, b_2, \ldots, b_n$ deducem

$$b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n=[b\,\alpha]=0 \tag{50}$$

şi la fel prin înmulţire cu $c_1, c_2, \ldots, c_n$ rezultă

$$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n=[c\,\alpha]=0. \tag{51}$$

De asemenea, înmulţind ecuaţiile (48) respectiv cu $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi adunînd rezultatele, deducem, dacă ţinem seama de ecuaţiile (45),

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=[\alpha\,\alpha]=Q_{1x}. \tag{52}$$

Ecuaţia (45) poate fi considerată ca o relaţie care defineşte mărimea x, determinabilă indirect, ca funcţie liniară de mărimile $l_1, l_2, \ldots, l_n$, determinabile direct prin măsurători, căci în adevăr, prin definiţie,

$$l_1=d_1-\xi_1,\ l_2=d_2-\xi_2,\ \ldots,\ l_n=d_n-\xi_n,$$

după relaţiile (16). Aceasta înseamnă că erorile medii pătratice ale determinărilor mărimilor $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sînt aceleaşi ca şi pentru $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, care am presupus că sînt egale

$$m_1=m_2=\cdots=m_n=m. \tag{53}$$

După legea de propagare a erorilor (§ 22), eroarea medie pătratică m_x a mărimii x, determinată de (51), este dată de relaţia

$$m_x^2=\alpha_1^2m_1^2+\alpha_2^2m_2^2+\cdots+\alpha_n^2m_n^2=[\alpha\,\alpha]\,m^2.$$

Avînd în vedere relaţia (52), putem scrie deci

$$m_x=m\sqrt{[\alpha\,\alpha]}$$

sau

$$m_x=m\sqrt{Q_{1x}}, \tag{54}$$

de unde, după relaţia (42), deducem

$$P_x=\frac{1}{Q_{1x}}. \tag{55}$$

Prin urmare, ponderea variabilei x pentru care am scris ecuaţiile (45) este egală cu inversul coeficientului care înlocuieşte pe x în aceste ecuaţii şi a cărui valoare se deduce din rezolvarea acestui sistem.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Pentru aflarea ponderii variabilei y procedăm la fel, dar înlocuim ecuațiile (45) prin sistemul

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{1y}+[ab]\,Q_{2y}+[ac]\,Q_{3y}&=0\\ [ab]\,Q_{1y}+[bb]\,Q_{2y}+[bc]\,Q_{3y}&=1\\ [ac]\,Q_{1y}+[bc]\,Q_{2y}+[cc]\,Q_{3y}&=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Înlocuind valorile (56) cu ecuația (44), obținem

$$y+[al]\,Q_{1y}+[bl]\,Q_{2y}+[cl]\,Q_{3y}=0 \tag{57}$$

analogă ecuației (46); dar valorile lui Q_1, Q_2, Q_3 din (57) nu mai sînt aceleași ca cele din (46), căci primele rezultă din rezolvarea sistemului (56), iar ultimele din rezolvarea sistemului (45). Pentru a face această distincție, am afectat parametrii Q_1, Q_2 Q_3 cu indicele corespunzător y.

Transformînd (57) la fel cum am făcut cu (46), deducem

$$y=-(\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\cdots+\beta_n l_n)\,, \tag{58}$$

unde am pus

$$\left.\begin{aligned} \beta_1&=a_1Q_{1y}+b_1Q_{2y}+c_1Q_{3y}\\ \beta_2&=a_2Q_{1y}+b_2Q_{2y}+c_2Q_{3y}\\ \beta_3&=a_3Q_{1y}+b_3Q_{2y}+c_3Q_{3y}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \beta_n&=a_nQ_{1y}+b_nQ_{2y}+c_nQ_{3y}\,. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Analog dezvoltărilor anterioare, obținem în loc de (49), (50) și (51), relațiile

$$[a\beta]=0\,;\quad [b\beta]=1\,;\quad [c\beta]=0\,. \tag{60}$$

De unde rezultă, în locul ecuației (52),

$$[\beta\beta]=Q_{2y}\,. \tag{61}$$

Prin considerații identice ca mai sus deducem

$$m_y=m\sqrt{[\beta\beta]}=m\sqrt{Q_{2y}}\,,$$

astfel încît

$$P_y=\frac{1}{Q_{2y}}\,. \tag{62}$$

Prin urmare, ponderea variabilei y se obține rezolvînd sistemul (56) în raport cu Q_{2y}, care înlocuiește pe y din ecuațiile normale, și luînd inversul acestei valori. Trebuie reținut deci că Q_{2y} din (62) nu este același Q_{2x} care se obține rezolvînd ecuațiile (45), ci el

Scanned with OKEN Scanner

se obține din rezolvarea ecuațiilor (56). Valorile Q_{1x}, Q_{2x}, Q_{3x} care rezultă din rezolvarea ecuațiilor (45) servesc la formarea soluției (47) pentru x și la calculul parametrilor α definiți prin relațiile (48). În mod analog, soluțiile Q_{1y}, Q_{2y}, Q_{3y} ale ecuațiilor (56) servesc la formarea soluției (58) pentru y și la calcularea parametrilor β definiți prin relațiile (59).

Pentru determinarea ponderii P_z a necunoscutei z procedăm la fel. Formăm sistemul

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{1z}+[ab]\,Q_{2z}+[ac]\,Q_{3z}&=0\\ [ab]\,Q_{1z}+[bb]\,Q_{2z}+[bc]\,Q_{3z}&=0\\ [ac]\,Q_{1z}+[bc]\,Q_{2z}+[cc]\,Q_{3z}&=1\,, \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

de unde rezultă

$$z=-(\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\cdots+\gamma_n l_n)\,, \tag{64}$$

unde am pus

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1&=a_1Q_{1z}+b_1Q_{2z}+c_1Q_{3z}\\ \gamma_2&=a_2Q_{1z}+b_2Q_{2z}+c_2Q_{3z}\\ \gamma_3&=a_3Q_{1z}+b_3Q_{2z}+c_3Q_{3z}\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_n&=a_nQ_{1z}+b_nQ_{2z}+c_nQ_{3z}\,, \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

ceea ce ne conduce, ca mai sus, la relațiile

$$[a\gamma]=0\,;\quad [b\gamma]=0\,;\quad [c\gamma]=1 \tag{66}$$

și, prin urmare,

$$[\gamma\gamma]=Q_{3z}\,, \tag{67}$$

de unde rezultă

$$P_z=\frac{1}{Q_{3z}}\,. \tag{68}$$

Prin urmare, ponderea variabilei z se obține rezolvînd sistemul corespunzător (63) în raport cu Q_{3z}, care înlocuiește pe z din ecuațiile normale, și luînd inversul acestei valori. Asupra acestei valori a lui Q_{3z} facem aceleași observații ca și asupra lui Q_{2y} din (62) și Q_{1x} din (55).

Metoda lui Gauss. Regula dedusă prin metoda precedentă ne permite să formulăm mai ușor și mai intuitiv criteriul pentru determinarea ponderilor variabilelor x, y, z, în funcție explicită de coeficienții care figurează în ecuațiile erorilor și deci în ecuațiile normale.

Procedeul eliminării prin metoda Gauss indică să formăm sistemele (45), (56) și (63). Vom începe cu ultimul sistem, căci în

metoda Gauss prima necunoscută care se calculează este z. Observăm apoi că sistemul (63) se deduce din (43) punînd Q_{1z}, Q_{2z}, Q_{3z}, în loc de x, y, z şi făcînd

$$[al]=0,\ [bl]=0,\ [cl]=1\,. \tag{69}$$

Din sistemul (63) astfel format, după eliminarea necunoscutei x, rămîne primul sistem transformat (26), în care însă trebuie să ţinem seama de valorile (69). Aceasta înseamnă că trebuie să punem

$$\left.\begin{aligned}[bl\cdot 1]&=[bl]-\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}=0\\ [cl\cdot 1]&=[cl]-\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}=-1,\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

după cum rezultă din (69).

O nouă transformare prin metoda Gauss ne conduce la sistemul (28), în care, ca mai sus, trebuie să punem

$$[cl\cdot 2]=[cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=-1\,, \tag{71}$$

după cum rezultă din (70).

Prin urmare, din ecuaţia (29) rămîne

$$[cc\cdot 2]\ Q_{3z}-1=0\,,$$

deci

$$Q_{3z}=\frac{1}{[cc\cdot 2]_z}=\frac{1}{P_z}\,, \tag{72}$$

expresie care coincide cu (68), dar are avantajul că ne dă această valoare ca funcţie explicită de coeficienţii a, b, c din ecuaţiile erorilor. Rezultă aşadar

$$P_z=[cc\cdot 2]_z\,, \tag{73}$$

paranteza fiind construită după regula cunoscută pentru sistemul (63), astfel încît

$$[cc\cdot 2]_z=[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,. \tag{74}$$

Pentru determinarea ponderii variabilei y, observăm că metoda lui Gauss permite aflarea necunoscutei care figurează în ultima coloană şi în ultima linie. Aceasta ne face să aranjăm sistemul parametrilor Q, astfel încît variabila Q_{2y} să figureze în ultima coloană,

Scanned with OKEN Scanner

iar ecuația obținută din (44) prin egalarea coeficientului lui y cu unitatea să figureze în ultima linie; avem astfel sistemul

$$\left.\begin{aligned}[aa]Q_{1y}+[ac]Q_{3y}+[ab]Q_{2y}&=0\\ [ac]Q_{1y}+[cc]Q_{3y}+[bc]Q_{2y}&=0\\ [ab]Q_{1y}+[bc]Q_{3y}+[bb]Q_{2y}&=1\,.\end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Observăm, și aceasta este foarte important, că după regula dată pentru formarea algoritmilor succesivi prin metoda lui Gauss, ordonarea cifrelor cu litere pentru sistemul (75) este, după regula enunțată,

$$1\to a,\ 2\to c,\ 3\to b\,. \tag{76}$$

Procedînd ca și la determinarea lui Q_{3z} în cazul precedent, vom obține

$$Q_{2y}=\frac{1}{[bb\cdot 2]_y}, \tag{77}$$

unde însă cifrele sînt ordonate după (76)

$$[bb\cdot 2]_y=[bb\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}\,. \tag{78}$$

După (62) și (77) rezultă

$$P_y=[bb\cdot 2]_y, \tag{79}$$

unde simbolul din membrul al doilea are semnificația (78).

Se poate deduce o relație utilă în practică, care leagă pe P_y cu P_z. În adevăr, dînd în (78) în factor raportul $\frac{[bb\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}$, se obține

$$[bb\cdot 2]=\frac{[bb\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}\left\{[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\},$$

de unde, avînd în vedere relațiile (73) și (74),

$$P_y=P_z\frac{[bb\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}\,. \tag{80}$$

Să trecem la calculul ponderii P_x a variabilei x, ceea ce revine, după (55), la calculul lui Q_{1x} din sistemul ecuațiilor pentru Q care are pe Q_{1x} în ultima coloană și ecuația dedusă din (44) prin egalarea cu unitatea a coeficientului lui x, în ultima linie, spre a putea aplica eliminarea lui Gauss. Obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned}[cc]Q_{3x}+[bc]Q_{2x}+[ac]Q_{1x}&=0\\ [bc]Q_{3x}+[bb]Q_{2x}+[ab]Q_{1x}&=0\\ [ac]Q_{3x}+[ab]Q_{2x}+[aa]Q_{1x}&=1\,.\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eliminarea după metoda Gauss ne conduce la soluția

$$Q_{1x}=\frac{1}{[aa\cdot 2]_x},\quad P_x=[aa\cdot 2]_x, \tag{82}$$

unde însă, după regula stabilită, ordonarea cifrelor cu litere este

$$1\to c,\ 2\to b,\ 3\to a, \tag{83}$$

astfel încît

$$[aa\cdot 2]_x=[aa\cdot 1]-\frac{[ab\cdot 1]\,[ab\cdot 1]}{[bb\cdot 1]},$$

iar după (83)

$$\left.\begin{aligned}[aa\cdot 1]_x&=[aa]-\frac{[ac]\,[ac]}{[cc]}\\ [ab\cdot 1]_x&=[ab]-\frac{[ac]\,[bc]}{[cc]}\\ [bb\cdot 1]_x&=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[cc]}.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

În modul acesta, problema este rezolvată prin ambele metode, care sînt cele mai utilizate în practică.

Extinderea procedeelor expuse pentru trei variabile la un număr oarecare, finit, de variabile este evidentă, formarea parantezelor făcîndu-se, după regula dată, pentru oricîte variabile.

Metoda determinanților. Cu toate că rezolvarea numerică a ecuațiilor normale se face obișnuit prin metoda eliminării, este comod în anumite împrejurări să se întrebuințeze metoda algebrică cunoscută, de rezolvare cu ajutorul determinanților; bine înțeles, admițînd că determinantul coeficienților ecuațiilor normale este diferit de zero, deci că sistemul ecuațiilor normale are o soluție unică. Tratăm, pentru precizare, cazul a trei necunoscute. Fie

$$\left.\begin{aligned}a_1x+b_1y+c_1z+l_1&=v_1\\ a_2x+b_2y+c_2z+l_2&=v_2\\ a_3x+b_3y+c_3z+l_3&=v_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ a_nx+b_ny+c_nz+l_n&=v_n\end{aligned}\right\} \tag{85}$$

ecuațiile erorilor și

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+[bl]&=0\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+[cl]&=0\end{aligned}\right\} \tag{86}$$

ecuațiile normale corespunzătoare. Prin eliminare am găsit

$$\begin{aligned}[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z+[bl\cdot 1]&=0\\ [bc\cdot 1]y+[cc\cdot 1]z+[cl\cdot 1]&=0,\end{aligned} \tag{87}$$

după prima eliminare, și

$$[cc\cdot 2]z+[cl\cdot 2]=0, \tag{88}$$

după a doua și ultima eliminare.

Pe de altă parte, din teoria ecuațiilor algebrice, determinatul sistemului (86) este

$$D=\begin{vmatrix}[ab] & [ab] & [ac]\\ [ab] & [bb] & [bc]\\ [ac] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}\neq 0 \tag{89}$$

și notînd cu

$$\left.\begin{aligned}D_x&=-\begin{vmatrix}[al] & [ab] & [ac]\\ [bl] & [bb] & [bc]\\ [cl] & [bc] & [cc]\end{vmatrix}\\ D_y&=-\begin{vmatrix}[aa] & [al] & [ac]\\ [ab] & [bl] & [bc]\\ [ac] & [cl] & [cc]\end{vmatrix}\\ D_z&=-\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [al]\\ [ab] & [bb] & [bl]\\ [ac] & [bc] & [cl]\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

rezultă, după cum se știe din algebră, soluția

$$x=\frac{D_x}{D},\quad y=\frac{D_y}{D},\quad z=\frac{D_z}{D}. \tag{91}$$

Între simbolurile lui Gauss și diferiții determinanți care se pot alcătui cu coeficienții ecuațiilor (86) există relații simple.

În adevăr, se verifică ușor că

$$[cc\cdot 2]=\frac{D}{\begin{vmatrix}[aa] & [ab]\\ [ab] & [bb]\end{vmatrix}}=\frac{D}{\delta_{[cc]}} \tag{92}$$

$$[c1\cdot 2]=\frac{D_z}{\delta_{[cc]}}, \tag{93}$$

unde am însemnat cu $\delta_{[cc]}$ minorul corespunzător elementului $[cc]$ din determinantul D.

Ponderile se pot exprima, de asemenea, prin determinanții astfel formați. În adevăr, avem

$$\frac{1}{P_x}=Q_{1x}=[\alpha\alpha]=\frac{\begin{vmatrix}[bb] & [bc]\\ [bc] & [cc]\end{vmatrix}}{D}=\frac{\delta_{[aa]}}{D}$$

$$\frac{1}{P_y}=Q_{2y}=[\beta\beta]=\frac{\begin{vmatrix}[aa] & [ac]\\ [ac] & [cc]\end{vmatrix}}{D}=\frac{\delta_{[bb]}}{D} \qquad (94)$$

$$\frac{1}{P_z}=Q_{3z}=[\gamma\gamma]=\frac{\begin{vmatrix}[aa] & [ab]\\ [ab] & [bb]\end{vmatrix}}{D}=\frac{\delta_{[cc]}}{D}.$$

O relație interesantă este

$$D=\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ 0 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1]\\ 0 & [bc\cdot 1] & [cc\cdot 1]\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}[aa] & [ab] & [ac]\\ 0 & [bb\cdot 1] & [bc\cdot 1]\\ 0 & 0 & [cc\cdot 2]\end{vmatrix} \qquad (95)$$

sau

$$D=[aa]\ \ [bb\cdot 1]\ \ [cc\cdot 2]. \qquad (96)$$

Aceste considerații asupra determinanților, pe lîngă faptul că ne pun la dispoziție o metodă în plus pentru rezolvarea ecuațiilor normale în anumite condiții (coeficienții să nu fie prea mari), dar ne lămuresc încă două aspecte interesante ale problemei celor mai mici pătrate, tratată prin simbolurile lui Gauss. Anume, în primul rînd, se constată că parantezele lui Gauss sînt forme strîns legate de simbolurile algebrice ale determinanților. În al doilea rînd, se poate răspunde la o chestiune importantă, anume: cînd și în ce condiții este posibilă sau nu este posibilă rezolvarea ecuațiilor normale? Corelația cu teoria determinanților ne dă posibilitatea să răspundem imediat: sistemul ecuațiilor normale are o soluție, și numai una, atunci cînd din totalitatea ecuațiilor erorilor se poate extrage cel puțin un grup care să constituie un sistem cu o soluție unică, deci pentru care determinantul coeficienților este diferit de zero.

Controlul calculului mărimilor Q. Efectuînd suma elementelor unui rînd, sau coloane, ale determinantului D (89), precum și suma elementelor libere din ecuațiile normale, obținem expresiile

$$\left.\begin{aligned} S_1&=[aa]+[ab]+[ac]\\ S_2&=[ab]+[bb]+[bc]\\ S_3&=[ac]+[bc]+[cc]\\ S_4&=[al]+[bl]+[ll]. \end{aligned}\right\} \qquad (97)$$

Adunînd ecuațiile (45), (56) și (63) rezultă relațiile de control

$$\left.\begin{aligned} S_1Q_{1x}+S_2Q_{2x}+S_3Q_{3x}&=1\\ S_1Q_{1y}+S_2Q_{2y}+S_3Q_{3y}&=1\\ S_1Q_{1z}+S_2Q_{2z}+S_3Q_{3z}&=1\,, \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

de unde, prin adunare, se obține

$$\begin{aligned} S_1(Q_{1x}+Q_{1y}+Q_{1z})+S_2(Q_{2x}+Q_{2y}+Q_{2z})+\\ +S_3(Q_{3x}+Q_{3y}+Q_{3z})=3\,. \end{aligned} \tag{99}$$

Este evident că, dacă am avea n necunoscute, am avea n ecuații (98), iar numărul din membrul al doilea al ecuației (99) ar fi tot n.

§ 114. Determinarea erorii medii pătratice a măsurătorilor

Ne mărginim la cazul a trei necunoscute. Fie Δx, Δy, Δz erorile reale ale necunoscutelor compensate x, y, z. Să înlocuim în ecuațiile erorilor (17) necunoscutele x, y, z prin $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ atunci, în locul erorilor aparente vom obține erorile reale în membrul al doilea al ecuațiilor (17), astfel încît

$$\left.\begin{aligned} a_1(x+\Delta x)+b_1(y+\Delta y)+c_1(z+\Delta z)+l_1&=\Delta_1\\ a_2(x+\Delta x)+b_2(y+\Delta y)+c_2(z+\Delta z)+l_2&=\Delta_2\\ a_3(x+\Delta x)+b_3(y+\Delta y)+c_3(z+\Delta z)+l_3&=\Delta_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_n(x+\Delta x)+b_n(y+\Delta y)+c_n(z+\Delta z)+l_n&=\Delta_n\,. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Înmulțind în ecuațiile precedente, succesiv cu a_1, a_2, ..., a_n și adunînd rezultatele, obținem

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]+[aa]\Delta x+[ab]\Delta y+[ac]\Delta z=[a\,\Delta];$$

dar, avînd în vedere prima ecuație normală (20), rezultă

$$[aa]\Delta x+[ab]\Delta y+[ac]\Delta z=[a\,\Delta]\,.$$

Repetînd înmulțirea prin b_1, b_2, ..., b_n și apoi prin c_1, c_2, ..., c_n obținem, prin același procedeu, sistemul de ecuații pentru erorile reale

$$\left.\begin{aligned} [aa]\Delta x+[ab]\Delta y+[ac]\Delta z&=[a\Delta]\\ [ab]\Delta x+[bb]\Delta y+[bc]\Delta z&=[b\Delta]\\ [ac]\Delta x+[bc]\Delta y+[cc]\Delta z&=[c\Delta]\,. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Scanned with OKEN Scanner

Observăm că aceste ecuaţii au exact aceeaşi structură ca şi ecuaţiile normale (20), cu singura deosebire că în locul necunoscutelor figurează erorile respective Δx, Δy, Δz, iar în termenii liberi figurează $-\Delta$ în locul lui l. Aplicînd metoda coeficienţilor nedeterminaţi (§ 113), obţinem în locul ecuaţiei (47) ecuaţia

$$\Delta x = \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \cdots + \alpha_n \Delta_n \qquad (102)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ sînt date de expresiile (48).

Să înmulţim, acum, în ecuaţiile erorilor (100) succesiv prin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (erorile aparente) şi să adunăm rezultatele; obţinem

$$[av](x+\Delta x)+[bv](y+\Delta y)+[cv](z+\Delta z)+[lv]=[v\Delta],$$

sau, avînd în vedere ecuaţiile (23), rezultă

$$[vl]=[v\Delta]. \qquad (103)$$

Să înmulţim fiecare dintre ecuaţiile erorilor iniţiale (17) prin $v_1, v_2, \ldots, v_n$ succesiv şi să adunăm rezultatele; obţinem, avînd în vedere relaţiile (23),

$$[vl]=[vv]. \qquad (104)$$

Comparînd (104) cu (103), rezultă

$$[vv]=[vl]=[v\Delta]. \qquad (105)$$

Dacă înmulţim în ecuaţiile (17) succesiv prin $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ şi adunăm, obţinem, avînd în vedere (105),

$$[a\Delta]x+[b\Delta]y+[c\Delta]z+[l\Delta]=[v\Delta]=[vv]. \qquad (106)$$

Pe de altă parte, înmulţind în ecuaţiile (100) succesiv prin $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ şi adunînd, deducem

$$[a\Delta]x+[b\Delta]y+[c\Delta]z+[l\Delta]+[a\Delta]\Delta x+[b\Delta]\Delta y+[c\Delta]\Delta z=[\Delta\Delta]$$

sau, avînd în vedere relaţia (106),

$$[a\Delta]\Delta x+[b\Delta]\Delta y+[c\Delta]\Delta z+[vv]=[\Delta\Delta]. \qquad (107)$$

În această ecuaţie $[\Delta\Delta]$ reprezintă, după cum ştim, suma pătratelor erorilor reale ale măsurătorilor sau observaţiilor care corespund datelor ce figurează în ecuaţiile iniţiale (100).

Numărul acestor ecuaţii fiind n, adică egal cu numărul măsurătorilor, după cele ştiute din teoria erorilor, eroarea medie pătratică

Scanned with OKEN Scanner

individuală este, dacă admitem că determinările sînt executate cu egală precizie,

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Delta\Delta}{n}}.$$

Pentru a exprima pe m cu ajutorul expresiei (107), ne rămîne să mai calculăm mărimile $[a\,\Delta]\,\Delta x$, $[b\,\Delta]\,\Delta y$, $[c\,\Delta]\,\Delta z$, care figurează în relaţia (107). Pentru aceasta, vom înmulţi pe

$$[a\Delta] = a_1\,\Delta_1 + a_2\,\Delta_2 + a_3\,\Delta_3 + \cdots + a_n\,\Delta_n$$

cu expresia lui Δx dată de formula (102); obţinem

$$[a\Delta]\,\Delta x = a_1\,\alpha_1\,\Delta_1^2 + a_2\,\alpha_2\,\Delta_2^2 + \cdots + a_n\,\alpha_n\,\Delta_n^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} a_i\,\alpha_j\,\Delta_i\,\Delta_j.$$

Dar, în virtutea proprietăţilor fundamentale ale erorilor reale accidentale, suma produselor $\Delta_i\,\Delta_j$ este nulă. Aşadar, rezultă

$$[a\Delta]\,\Delta x = [a\alpha\cdot\Delta^2] = [a\alpha]\,m^2,$$

deoarece putem înlocui fiecare eroare individuală prin valoarea ei medie $\Delta_1^2 = \Delta_2^2 = \cdots = \Delta_n^2 = m^2$ cu o suficient de bună aproximaţie. Pe de altă parte, după relaţia (49) avem $[a\alpha] = 1$; aşadar, repetînd acelaşi raţionament şi pentru celelalte două expresii care figurează în (107), deducem

$$[a\Delta]\,\Delta x = [b\Delta]\,\Delta y = [c\Delta]\,\Delta z = m^2.$$

Cu aceste valori, ecuaţia (107) se scrie deci

$$nm^2 = [vv] + 3\,m^2,$$

de unde

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-3}}. \qquad (108)$$

Formula se generalizează fără dificultate pentru cazul unui număr oarecare r de necunoscute, astfel încît formula generală este

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-r}}, \qquad (109)$$

formulă pe care o numim *formula lui Bessel generalizată*.

În această formulă, mărimea $n-r$ reprezintă numărul de determinări făcute în plus, peste numărul necunoscutelor. Cu cît acest număr este mai mare. cu atît mai exact se determină măsurătoarea efectuată, eroarea medie pătratică fiind cu atît mai mică, cu cît $n-r$ este mai mare; deci precizia va fi cu atît mai mare.

Scanned with OKEN Scanner

§ 115. Formulele de control ale lui Lüroth şi Fechner

Aceste formule aproximative servesc în calculul erorilor ca formule de control, ele bazîndu-se pe formula lui Bessel generalizată, aşa cum formula lui *Peters* a fost dedusă din formula lui Bessel obişnuită (§ 25).

În partea întîi (§ 25) am stabilit relaţia

$$|\Delta| = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,|v|,$$

între eroarea reală, eroarea aparentă şi numărul de determinări, pornind de la formula lui Bessel obişnuită, care rezultă din (107) făcînd $r=1$. În mod analog, putem scrie pentru cazul a r variabile

$$|\Delta| = \sqrt{\frac{n}{n-r}}\,|v|.$$

În aceste condiţii, eroarea medie devine

$$\theta = \frac{[|\Delta|]}{n} = \frac{[|v|]}{\sqrt{n\,(n-r)}} \tag{110}$$

şi deci, după (§ 91).

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\;\theta = 1{,}2533\,\frac{[|v|]}{\sqrt{n\,(n-r)}}, \tag{111}$$

formulă cunoscută sub numele de formula lui *Lüroth* şi care este o generalizare a formulei lui Peters.

Pentru stabilirea formulei lui *Fechner*, observăm că formula lui Bessel (§ 25)

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$

şi formula lui Peters (§ 25)

$$m = 1{,}2533\,\frac{[|v|]}{\sqrt{n\,(n-r)}}$$

ne dau valori neadmisibil de neconcordante în cazul a *două* măsurători. În adevăr, pentru $n=2$, notînd cu d diferenţa celor două determinări, formulele lui Bessel şi Peters ne dau respectiv

$$\left.\begin{aligned} m_B &= \sqrt{\frac{\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2}{2-1}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = 0{,}7071\cdot d,\\ m_P &= 1{,}2533\,\frac{\frac{d}{2}+\frac{d}{2}}{\sqrt{2\times 1}} = 0{,}88623\cdot d; \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

întrucît pentru $n=2$, cu $l_2=l_1+d$ şi valoarea medie

$$L=\frac{1}{2}(l_1+l_2)=l_1+\frac{d}{2},$$

avem

$$v_1=l_1-\left(l_1+\frac{d}{2}\right)=-\frac{d}{2}, \quad v_2=(l_1+d)-\left(l_1+\frac{d}{2}\right)=+\frac{d}{2},$$

în formula lui Peters luîndu-se valorile absolute, după cum ştim. S-a căutat a se corecta această nepotrivire observînd că s-ar putea lua, prin analogie cu (111), în loc de $n-1$ la numitorul formulei lui Peters, expresia $n-x$, urmînd ca valoarea lui x să se determine prin condiţia ca cele două formule astfel obţinute (112) (dar cu numitorul modificat $2-x$ în loc de $2-1=1$ în formula lui Peters) să fie egale

$$\frac{d}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{d}{\sqrt{2(2-x)}},$$

de unde

$$x=\frac{4-\pi}{2}\approx\frac{1}{2},$$

astfel încît se obţine formula aproximativă de control a lui Fechner

$$m=\sqrt{\pi}\,\frac{[|v|]}{\sqrt{n(2n-1)}}=1{,}77245\,\frac{[|v|]}{\sqrt{n(2n-1)}}. \qquad (113)$$

Aceste formule servesc de multe ori în practica geodezică.

§ 116. Calculul sumei pătratelor erorilor aparente

Calculul sumei pătratelor erorilor aparente $[vv]$, necesar în formula erorii medii pătratice, se poate efectua în mai multe moduri.

1. După rezolvarea sistemului de ecuaţii normale se introduc valorile necunoscutelor în ecuaţiile iniţiale ale erorilor şi se găsesc direct valorile erorilor aparente, cu care se formează suma pătratelor lor; astfel, din sistemul de ecuaţii ale erorilor (17), putem scrie prin ridicare la pătrat

$$\begin{aligned}[vv]=[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+2[al]x+\\ +[bb]y^2+2[bc]yz+2[bl]y+\\ +[cc]z^2+2[cl]z+\\ +[ll].\end{aligned} \qquad (114)$$

2. Putem înmulți ecuațiile erorilor (17) succesiv cu $l_1, l_2, \ldots, l_n$ și aduna rezultatele, avînd în vedere formula (102); se obține

$$[al]x+[bl]y+[cl]z+[ll]=[vl]=[vv]. \qquad (115)$$

Introducînd în această ecuație valorile lui x, y, z, deduse din ecuațiile normale, rezultă suma căutată.

3. Putem considera ecuația (115) drept a patra ecuație normală, pe care o adăugăm sistemului ecuațiilor normale (20), și apoi procedăm prin metoda de eliminare Gauss. După prima eliminare obținem, în aceste condiții, o a treia ecuație adăugată la sistemul (26), de forma

$$[bl\cdot 1]y+[cl\cdot 1]z+[ll\cdot 1]=[vv].$$

După cea de-a doua eliminare, prin același procedeu, găsim o a doua ecuație adăugată ecuației (29), anume

$$[cl\cdot 2]z+[ll\cdot 2]=[vv].$$

În sfîrșit, o ultimă eliminare — în cazul a trei variabile — ne conduce la relația importantă

$$[ll\cdot 3]=[vv], \qquad (116)$$

care ne dă suma căutată, direct, în funcție de coeficienții ecuațiilor inițiale. De altfel, paranteza din membrul întîi al relației precedente se găsește și în schema calculului de control [formula (41)].

Dezvoltarea formulei (116) ne dă

$$[vv]=[ll]-\frac{[al]\ [al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]\ bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]\ [cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}. \qquad (117)$$

Observație. În unele calcule, similare celor de mai sus, vom avea nevoie să folosim o identitate algebrică ușor de verificat

$$[aa]x^2+2[ab]xy+2[ac]xz+[bb]y^2+2[bc]yz+[cc]z^2=$$
$$=\frac{1}{[aa]}\{[aa]x+[ab]y+[ac]z\}^2+\frac{1}{[bb\cdot 1]}\{[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z\}^2+\frac{\{[cc\cdot 2]z\}^2}{[cc\cdot 2]}. \qquad (118)$$

În această relație pur algebrică, simbolurile-paranteze sînt aceleași care sînt definite în calculul prin metoda lui Gauss.

§ 117. Calculul cu valori rotunjite ale necunoscutelor

Adeseori, pentru a simplifica rezolvarea problemei propuse prin metoda celor mai mici pătrate, se introduc de la început valori mai simple numeric pentru necunoscute, rotunjind în mod conve-

nabil numerele care le reprezintă. Astfel, putem pune în ecuațiile erorilor în loc de x, y, z valorile $x'+\Delta x$, $y'+\Delta y$, $z'+\Delta z$, unde am notat prin x', y', z' niște valori numerice care au fost rotunjite, deci mai simple și mai ușor de mînuit în calcule. Se obțin astfel ecuațiile erorilor, după (17)

$$\left.\begin{aligned} a_1\Delta x+b_1\Delta y+c_1\Delta z+l_1'&=v_1\\ a_2\Delta x+b_2\Delta y+c_2\Delta z+l_2'&=v_2\\ a_3\Delta x+b_3\Delta y+c_3\Delta z+l_3'&=v_3\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot&\\ a_n\Delta x+b_n\Delta y+c_n\Delta z+l_n'&=v_n, \end{aligned}\right\} \tag{119}$$

unde am pus

$$a_ix'+b_iy'+c_iz'+l_i=l_i' \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots n). \tag{120}$$

Sistemul de ecuații ale erorilor în forma (119) se rezolvă exact ca și sistemul obișnuit. Acest procedeu este mult utilizat în practică.

§ 118. Determinarea valorilor cele mai probabile ale necunoscutelor din măsurători indirecte, de precizii diferite

Problema pe care am rezolvat-o pînă acum tratează cazul în care măsurătorile care conduceau la ecuațiile erorilor erau efectuate cu aceeași precizie, avînd aceeași eroare medie pătratică și aceeași pondere.

Să presupunem acum că rezultatele experimentale $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$, care figurează în ecuațiile (15), sînt afectate de ponderi diferite. Aceasta înseamnă că și erorile aparente din (15), $v_1, v_2, \ldots, v_n$, vor fi afectate de ponderi diferite.

Metoda de rezolvare a acestei probleme nu diferă de metoda utilizată în cazul preciziilor egale. În adevăr, fie

$$a_kx+b_ky+c_kz+l_k=v_k \tag{121}$$

ecuația erorilor care corespunde ponderii p_k, deci valorii măsurate sau observate direct ξ_k, respectiv l_k după (16).

Fie μ eroarea medie pătratică a unității de pondere. Eroarea medie pătratică individuală a unei determinări experimentale de pondere p_k este, după cum știm din teoria erorilor,

$$m_k=\frac{\mu}{\sqrt{p_k}}, \tag{122}$$

de unde rezultă

$$\mu=m_k\sqrt{p_k}. \tag{123}$$

Ca eroare medie pătratică a unității de pondere μ alegem una dintre erorile medii pătratice a uneia dintre măsurători, de exemplu măsurătoarea k.

Să înmulțim în ecuația (121) cu $\sqrt{p_k}$; obținem

$$a_k\sqrt{p_k}\,x+b_k\sqrt{p_k}\,y+c_k\sqrt{p_k}\,z+l_k\sqrt{p_k}=v_k\sqrt{p_k}. \qquad (124)$$

Observăm că eroarea medie pătratică a termenului liber $l_k\sqrt{p_k}$ este $m_k\sqrt{p_k}=\mu$, deci egală cu eroarea medie pătratică a unității de pondere, deoarece m_k este, prin ipoteză, eroarea medie pătratică a determinării ξ_k, deci a lui l_k. Ecuațiile (124) corespund, așadar, la determinări cu egală precizie și pot fi rezolvate după metoda dezvoltată anterior. Rezultă că problema determinării valorilor cele mai probabile ale necunoscutelor din măsurători indirecte de precizii inegale se reduce la rezolvarea aceleiași probleme pentru precizii egale. În acest scop, înmulțim în fiecare ecuație de erori cu rădăcina pătrată a ponderii care corespunde determinării respective.

După aceasta, putem deduce ecuațiile normale ca și în cazul determinărilor de egală precizie.

În aceste condiții, ecuațiile normale (20) pentru trei necunoscute devin

$$\left.\begin{aligned}[aap]x+[abp]y+[acp]z+[alp]&=0\\ [abp]x+[bbp]y+[bcp]z+[blp]&=0\\ [acp]x+[bcp]y+[ccp]z+[clp]&=0,\end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

cu condițiile deduse în același mod ca relațiile (23),

$$[avp]=0,\quad [bvp]=0,\quad [cvp]=0. \qquad (126)$$

Rezolvarea ecuatiilor (125) se face după aceeași schemă ca și rezolvarea ecuațiilor normale (20). Eroarea medie pătratică dată de formula (106) devine, în acest caz, eroarea medie pătratică a unității de pondere

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[vvp]}{n-3}}, \qquad (127)$$

deoarece ecuațiile erorilor (124) cu $k=1, 2, 3, \ldots, n$ și deci ecuațiile normale (125) corespund, după cum am observat mai sus, unității de pondere.

În mod analog, pentru r necunoscute rezultă formula

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[vvp]}{n-r}}. \qquad (128)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ponderile individuale ale necunoscutei se stabilesc în raport cu aceeaşi unitate μ, astfel încît avem

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}, \quad m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad m_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_z}}, \tag{129}$$

unde p_x, p_y, p_z sînt ponderile necunoscutelor determinate din ecuaţiile de egală precizie (125) după metoda dezvoltată în § 113. Valoarea lui $[vvp]$ se calculează după una dintre formulele date în § 116. Pentru control, se poate folosi ecuaţia (114), care ia forma

$$[vvp] = [alp]x + [blp]y + [clp]z + [llp]. \tag{130}$$

§ 119. Determinarea erorii medii pătratice a unei funcţii liniare de necunoscutele ale căror valori se calculează indirect, din ecuaţiile erorilor

Fie, pentru a fixa ideile, trei necunoscute x, y, z, care se pot determina prin rezolvarea ecuaţiilor normale din măsurători indirecte.

Fie

$$f(x, y, z) = A_1x + A_2y + A_3z \tag{131}$$

o funcţie liniară de aceste variabile, coeficienţii A_1, A_2, A_3 fiind constanţi. Ni se cere să determinăm eroarea medie pătratică m_f a funcţiei f.

Această problemă se poate rezolva în modul arătat în prima parte a expunerii de faţă, la teoria erorilor, unde am vorbit de propagarea erorilor, căci formulele respective au fost stabilite admiţîndu-se independenţa variabilelor x, y, z între ele, ceea ce nu este cazul în problema de faţă. În adevăr, mărimile x, y, z se deduc, în problema de faţă, din ecuaţiile erorilor care exprimă faptul că aceste mărimi depind *toate* de *aceleaşi* valori găsite experimental $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, şi anume, fiind legate de acestea printr-un număr n, suficient de mare, de relaţii (ecuaţiile erorilor).

Este cazul să aplicăm formula (121), § 118, stabilită în teoria probabilităţilor pentru variabilele corelate

$$m_f^2 = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 + 2r_{yz}m_ym_z + 2r_{zx}m_zm_x + 2r_{xy}m_xm_y,$$

ceea ce necesită calculul coeficienţilor de corelaţie r_{ij}, calcul puţin comod. De aceea, este mult mai convenabil să se rezolve problema prin reducerea sistemului de variabile corelate la un sistem echivalent de variabile necorelate.

Scanned with OKEN Scanner

Se numesc sisteme echivalente, sistemele cărora la corespund, pentru aceleaşi şiruri de determinări experimentale, aceleaşi ecuaţii normale. Atît valorile necunoscutelor cît şi ponderile, respectiv erorile medii pătratice, deduse din rezolvarea celor două sisteme echivalente vor fi evident egale.

Metoda constă deci în operaţii de reducere a sistemului de variabile corelate la un sistem echivalent de variabile necorelate. Dezvoltăm metoda tot pentru cazul a trei variabile, procedeul putînd fi extins şi la un număr oarecare, finit, de variabile.

Un astfel de sistem echivalent cu sistemul iniţial, permiţînd însă introducerea de variabile necorelate, se poate forma luînd primele ecuaţii din fiecare sistem succesiv care se obţine prin transformarea ecuaţiilor normale. În acest mod, din sistemele (20), (26) şi (30), pentru cazul a trei variabile care figurează în expresia (131), se obţine următorul sistem al *ecuaţiilor normale reduse*

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z &= -\frac{[al]}{[aa]} \\ y+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z &= -\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \\ z &= -\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}. \end{aligned}\right\} \tag{132}$$

Acest sistem, care conţine tot necunoscutele corelate x, y, z, permite transformarea pentru necunoscute independente; deoarece are aceeaşi putere ca şi sistemul ecuaţiilor normale (20), ambele sisteme sînt echivalente. Sistemul (132) este suficient pentru rezolvarea oricărei probleme privitoare la compensarea valorilor iniţiale ale necunoscutelor.

Să notăm

$$\frac{[al]}{[aa]}=u_1;\quad \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=u_2;\quad \frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}=u_3. \tag{133}$$

Dacă considerăm mărimile u_1, u_2, u_3 astfel introduse ca alcătuind o nouă serie de determinări *independente*, dar cu *ponderile*

$$P_1=[aa],\quad P_2=[bb\cdot 1],\quad P_3=[cc\cdot 2], \tag{134}$$

atunci ecuaţiile sistemului

$$\left.\begin{aligned} x+\frac{[ab]}{[aa]}y+\frac{[ac]}{[aa]}z+u_1 &= v_1 \\ y+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}z+u_2 &= v_2 \\ z+u_3 &= v_3 \end{aligned}\right\} \tag{135}$$

Scanned with OKEN Scanner

pot fi considerate ca ecuaţiile corespunzătoare ale erorilor pentru determinările ponderate independente u_1, u_2, u_3. Că aceste valori sînt independente rezultă din însuşi faptul că determinările iniţiale $l_1, l_2, \ldots, l_n$ (respectiv $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$) sînt independente.

Justificarea afectării mărimilor u_1, u_2, u_3 cu ponderile p_1, p_2, p_3, date de (134), este simplă. În adevăr, prima relaţie de definiţie (133) se poate scrie dezvoltat

$$u_1=\frac{a_1}{[aa]}l_1+\frac{a_2}{[aa]}l_2+\cdots+\frac{a_n}{[aa]}l_n, \tag{136}$$

care exprimă pe u_1 ca o funcţie liniară de $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Fie

$$m_{l_1}=m_{l_2}=\cdots=m_{l_n}=m, \tag{137}$$

erorile medii pătratice ale mărimilor $l_1, l_2, \ldots, l_n$; aceste erori sînt egale, întrucît am admis că determinările $l_1, l_2, \ldots, l_n$ sînt cu egală precizie. Dar după regula propagării erorilor, eroarea medie pătratică m_1 a lui u_1 este dată de relaţia

$$m_1^2=\frac{a_1^2}{[aa]^2}m_{l_1}^2+\frac{a_2^2}{[aa]^2}m_{l_2}^2+\cdots+\frac{a_n^2}{[aa]^2}m_{l_n}^2=\frac{[aa]}{[aa]^2}m^2=\frac{m^2}{[aa]},$$

de unde rezultă

$$\frac{m_1^2}{m^2}=\frac{1}{[aa]}. \tag{138}$$

Dar, după teorema care stabileşte relaţia dintre erorile medii pătratice şi ponderi avem

$$\frac{m_1^2}{m^2}=\frac{1}{P_1}, \tag{139}$$

căci considerăm pe m drept eroare medie pătratică a determinării de pondere unitate. Comparînd (138) şi (139) rezultă prima relaţie (134).

Pentru a doua relaţie (134), calculul este puţin mai complicat. Îl indicăm. Din a doua relaţie (133) pusă sub o formă corespunzătoare lui (136), se obţine eroarea medie pătratică a lui u_2 dată de relaţia

$$m_2^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)^2}{[bb\cdot 1]^2}m^2=\frac{m^2}{[bb\cdot 1]},$$

deoarece se verifică uşor că

$$\sum_{i=1}^{n}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)^2=[bb]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]=$$
$$=[bb]-\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}=[bb\cdot 1].$$

Aşadar,

$$\frac{m_2^2}{m^2}=\frac{1}{[bb\cdot 1]}=\frac{1}{P_2},$$

de unde rezultă a doua relaţie (134).

Pentru a treia relaţie (134) se procedează întocmai, dar calculul este mai greoi. Procedînd ca mai sus, putem scrie după a treia relaţie (133)

$$m_3^2=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\sum_{i=1}^{n}\left\{c_i-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}b_i-\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\frac{[ab]}{[aa]}\right)a_i\right\}^2 m^2=$$
$$=\frac{m^2}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc]+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}[bb]+\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]\,[ab]}{[bb\cdot 1]\,[aa]}\right)^2[aa]-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc]-\right.$$
$$\left.-2\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]\,[ab]}{[bb\cdot 1]\,[ab]}[ac]+2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[bc\cdot 1]\,[ab]}{[bb\cdot 1]\,[aa]}\right)[ab]\right\},$$

de unde prin simple reduceri şi grupări de termeni se obţine

$$m_3^2=\frac{[cc\cdot 2]}{[cc\cdot 2]^2}m^2=\frac{m^2}{[cc\cdot 2]},$$

astfel încît din

$$\frac{m_3^2}{m^2}=\frac{1}{[cc\cdot 2]}=\frac{1}{P_3};$$

rezultă şi a treia relaţie (134).

Acestea fiind stabilite, se verifică imediat că sistemul de erori (135) ne conduce la aceleaşi ecuaţii normale (20) ca şi sistemul de erori iniţiale (17). Aceasta înseamnă că sistemele (135) şi (17) sînt echivalente, după cum am specificat mai înainte.

Pentru a stabili această proprietate, să formăm schema de calcul al coeficienţilor ecuaţiilor normale corespunzătoare sistemului de erori (135) (tabela 2).

Calculul sumelor pe coloane se face dezvoltînd parantezele respective după formulele lor de definiţie.

Introducînd în ecuaţiile (125) coeficienţii calculaţi după schema din tabela 2, se obţin ecuaţiile normale (20). Rezultă că şirul de determinări independente ponderate u_1, u_2, u_3 este echivalent cu şirul determinărilor iniţiale l_1, l_2, l_3 de egală precizie (pondere egală cu unitatea).

Scanned with OKEN Scanner

a	b	c	l	p	paa	pab	pac	pal
1	$\frac{[a\,b]}{[a\,a]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[al]}{[aa]}$	$[aa]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$
0	1	$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$[bl\cdot 1]$	0	0	0	0
0	0	1	$\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$[cc\cdot 2]$	0	0	0	0
					$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$

Expresiile necunoscutelor inițiale x, y, z în funcție de valorile u_1, u_2, u_3 se obțin direct din ecuațiile (132) și (133).

Rezultă

$$\left.\begin{aligned} x &= -u_1+\frac{[ab]}{[aa]}u_2+\left(\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[ab]\,[bc\cdot 1]}{[aa]\,[bb\cdot 1]}\right)u_3 \\ y &= -u_2+\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}u_3 \\ z &= -u_3. \end{aligned}\right\} \qquad (140)$$

Introducînd aceste valori ale necunoscutelor corelate x, y, z în funcția (131), obținem această funcție exprimată prin noile mărimi independente u_1, u_2, u_3, pe care le putem considera drept noi variabile

$$f = f(u_1, u_2, u_3). \qquad (141)$$

Am notat cu m eroarea medie pătratică a unei determinări individuale, pe care o luăm ca eroare medie pătratică a unității de pondere. După cele știute din teoria erorilor, vom obține pentru erorile medii pătratice ale determinărilor u_1, u_2, u_3, afectate de ponderile p_1, p_2, p_3, valorile date de relațiile (134)

$$m_1 = \frac{m}{\sqrt{p_1}}, \quad m_2 = \frac{m}{\sqrt{p_2}}, \quad m_3 = \frac{m}{\sqrt{p_3}}. \qquad (142)$$

După ce am transformat funcția inițială $f(x, y, z)$ de variabilele corelate, într-o funcție $f(u_1, u_2, u_3)$ de variabile independente prin substituțiile (140), sîntem în măsură să calculăm eroarea medie pătratică a funcției f, după regula propagării erorilor independente.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 2

pbb	*pbc*	*pbl*	*pcc*	*pcl*
$\frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$ $[bb\cdot 1]$ 0	$\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$ $[bc\cdot 1]$ 0	$\frac{[ab]\,[al]}{[aa]}$ $[bl\cdot 1]$ 0	$\frac{[ac]\,[ac]}{[aa]}$ $\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ $[cc\cdot 2]$	$\frac{[ac]\,[al]}{[aa]}$ $\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$ $[cl\cdot 2]$
$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[cc]$	$[cl]$

Avem (§ 22)

$$m_f^2=\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 m_1^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2 m_2^2+\left(\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)^2 m_3^2= \\ =\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\frac{1}{p_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2\frac{1}{p_2}+\left(\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)^2\frac{1}{p_3}\right\}m^2. \tag{143}$$

Derivatele parţiale care figurează în această expresie se obţin prin regula obişnuită de derivare. Ţinînd seamă de expresia (131) a funcţiei $f(x, y, z)$ şi de expresiile (140), se obţine

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial u_1}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_1}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_1}=-A_1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_2}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_2}=A_1\frac{[ab]}{[aa]}-A_2 \\ \frac{\partial f}{\partial u_3}&=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_3}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_3}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_3}=A_1\left\{\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[ab]\,[bc\cdot 1]}{[aa]\,[bb\cdot 1]}\right\}+A_2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-A_3. \end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Introducem notaţiile

$$\left.\begin{aligned} A_2-A_1\frac{[ab]}{[aa]}&=(A_2\cdot 1) \\ A_3-A_1\frac{[ac]}{[aa]}&=(A_3\cdot 1) \\ (A_3\cdot 1)-(A_2\cdot 1)\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}&=(A_3\cdot 2). \end{aligned}\right\} \tag{145}$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste notaţii, expresiile (144) devin

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_1} &= -A_1, \quad \frac{\partial f(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_2} = -(A_2 \cdot 1), \\ \frac{\partial f(u_1, u_2, u_3)}{\partial u_3} &= -(A_3 \cdot 2), \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

deoarece

$$\left(A_3 - A_1\frac{[ac]}{[aa]}\right) - \left(A_2 - A_1\frac{[ab]}{[aa]}\right)\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = (A_3\cdot 1) - (A_2\cdot 1)\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} = (A_3\cdot 2).$$

Introducînd valorile (146) în expresia (143) şi ţinînd seama de (134), obţinem pentru eroarea medie pătratică a funcţiei considerate

$$m_f^2 = \left\{\frac{A_1^2}{[aa]} + \frac{(A_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{(A_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}\right\} m^2. \tag{147}$$

Dacă rezolvarea ecuaţiilor în parametrii Q s-a făcut cu ajutorul determinanţilor, formula (147) se poate transforma precum urmează

$$\left.\begin{aligned} m_f^2 &= \left\{A_1^2\delta_{[aa]} + 2A_1A_2\delta_{[ab]} + 2A_1A_3\delta_{[ac]} + A_2^2\delta_{[bb]} + 2A_2A_3\delta_{[bc]} + A_3^2\delta_{[cc]}\right\}\frac{m^2}{D} \\ m_f^2 &= \left\{A_1^2Q_{1x} + 2A_1A_2Q_{2x} + 2A_1A_3Q_{3x} + A_2^2Q_{2y} + 2A_2A_3Q_{3y} + A_3^2Q_{3z}\right\}m^2. \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

§ 120. Determinarea erorii medii pătratice a unei funcţii liniare de funcţii care sînt, la rîndul lor, funcţii de necunoscute ale căror valori se calculează indirect

Această problemă se poate prezenta în cazul elipsei de egală probabilitate. Ne mărginim la două funcţii de trei variabile x, y, z, care se calculează din ecuaţiile erorilor prin metoda celor mai mici pătrate

$$\varphi = A_1x + A_2y + A_3z, \qquad \psi = B_1x + B_2y + B_3z, \tag{149}$$

iar ca funcţie de funcţii fie combinaţia liniară

$$f = f(\varphi, \psi) = \alpha\varphi + \beta\psi, \tag{150}$$

unde α şi β sînt constante.

După paragraful precedent, ştim să determinăm erorile medii pătratice m_φ şi m_ψ ale funcţiilor (149), exprimate cu ajutorul erorii

Scanned with OKEN Scanner

medii pătratice individuale m a măsurătorilor inițiale, de egală precizie.

Se cere să determinăm eroarea medie pătratică a funcției f. După formula (147) avem

$$\left.\begin{aligned} m_\varphi^2 &= \left\{\frac{A_1^2}{[aa]}+\frac{(A_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(A_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2 \\ m_\psi^2 &= \left\{\frac{B_1^2}{[aa]}+\frac{[B_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{[B_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2. \end{aligned}\right\} \tag{151}$$

Înlocuind expresiile lui φ și ψ din (149) în expresia (150), obținem

$$f(x,\ y,\ z)=(\alpha A_1+\beta B_1)x+(\alpha A_2+\beta B_2)y+(\alpha A_3+\beta B_3)z. \tag{152}$$

Cu notațiile

$$\alpha A_1+\beta B_1=C_1,\quad \alpha A_2+\beta B_2=C_2,\quad \alpha A_3+\beta B_3=C_3, \tag{153}$$

funcția (152) ia tot forma funcțiilor liniare tratate în paragraful precedent, astfel încît, tot după formula (147), obținem pentru eroarea medie pătratică m_f a funcției f, dată de (152), ținînd seama de (153),

$$m_f^2=\left\{\frac{C_1^2}{[aa]}+\frac{(C_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(C_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2. \tag{154}$$

Dacă dezvoltăm expresiile lui C_1, C_2, C_3, obținem pentru (154)

$$m_f^2=\alpha^2\left\{\frac{A_1^2}{[aa]}+\frac{(A_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(A_3\cdot 1)^2}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2+\beta^2\left\{\frac{B_1^2}{[aa]}+\frac{(B_2\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(B_3\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2+$$

$$+2\alpha\beta\left\{\frac{A_1B_1}{[aa]}+\frac{(A_2\cdot 1)(B_2\cdot 1)}{[bb\cdot 1]}+\frac{(A_3\cdot 2)(B_3\cdot 2)}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2 \tag{155}$$

sau

$$m_f^2=\alpha^2 m_\varphi^2+\beta^2 m_\psi^2+2\alpha\beta m_{\varphi\psi}, \tag{156}$$

unde

$$m_{\varphi\psi}=\left\{\frac{A_1B_1}{[aa]}+\frac{(A_2\cdot 1)(B_2\cdot 1)}{[bb\cdot 1]}+\frac{(A_3\cdot 2)(B_3\cdot 2)}{[cc\cdot 2]}\right\}m^2. \tag{157}$$

§ 121. Scheme pentru rezolvarea ecuațiilor normale și reduse

Tabela 3. Schema Gauss II. Cazul a trei variabile

Nr. R.	Denumirea rîndului	1	2	3	4	5	Modul de construire a elementelor schemei
		$[a$	$[b$	$[c$	$[l$	$[s]$	
1	$a]$	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[al]$	$[as]$	Coeficienţii primei ecuaţii normale
2			$\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[al]}{[aa]}$	$\frac{[as]}{[aa]}$	Elementele rîndului 1 : cu primul element. = Coeficienţii primei ecuaţii normale redusă
3	$b]$		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$	$[bs]$	Coeficienţii ecuaţiei a doua normală, fără primul coeficient
4			$\frac{[ab]}{[aa]}\times[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}\times[ac]$	$\frac{[ab]}{[aa]}\times[al]$	$\frac{[ab]}{[aa]}\times[as]$	Primul element din R(2)× cu elementele R(1), începînd cu cel de deasupra lui
5	$b\cdot 1]$		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$	$[bs\cdot 1]$	R(3) — R(4) = coeficienţii ecuaţiei 1-a normale transformată
6				$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\frac{[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	Elementele R(5) : cu primul element = Coeficienţii ecuaţiei a 2-a normală redusă
7	$c]$			$[cc]$	$[cl]$	$[cs]$	Coeficienţii ecuaţiei a 3-a normală, fără primii doi
8				$\frac{[ac}{[aa]}\times ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}\times[al]$	$\frac{[ac]}{[aa]}\times[as]$	Al doilea element din R(2) × cu elementele din R(1), începînd cu cel de deasupra lui
9	$c\cdot 1]$			$[cc\cdot 1]$	$[cl\cdot 1$	$[cs\cdot 1]$	R(7) — R(8) = coeficienţii ecuaţiei a 2-a normală transformată
10				$\frac{bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\times[bc\cdot 1]$	$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\times[bl\cdot 1]$	$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\times[bs\cdot 1]$	Primul element din R(5) × cu elementele din R(5) începînd cu cel de deasupra lui
11	$c\cdot 2]$			$[cc\cdot 2$	$[cl\cdot 2]$	$[cs\cdot 2]$	R(9) — R(10) = coeficienţii ecuaţiei a 3-a normală transformată
12					$\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	$\frac{[cs\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	Elementele R(11) : cu primul element = coeficienţii ecuaţiei a 3-a normală redusă
13	$l]$				$[ll]$	$[ls]$	Formulele (37), de control

Scanned with OKEN Scanner

14					$\frac{[al]}{[aa]}\times[al]$	$\frac{[al]}{[aa]}\times[as]$	Al treilea element din R(2) $\times$ cu elementele R(1), începînd cu cel de deasupra lui
15	$l \cdot 1]$				$[ll \cdot 1]$	$[ls \cdot 1]$	R(13) — R(14). Formulele (39) de control
16					$\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\times[bl \cdot 1]$	$\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\times[bs \cdot 1]$	Al doilea element din R(6) $\times$ cu elementele R(5) începînd cu cel de deasupra lui
17	$l \cdot 2]$				$[ll \cdot 2$	$[ls \cdot 2]$	R(15) — R(16). Formulele (40) de control
18					$\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}\times[cl \cdot 2]$	$\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}\times[cs \cdot 2]$	Primul element din R(12) $\times$ cu elementele R(11), începînd cu cel de deasupra lui
19	$l \cdot 3]$	$\Delta x=$	$\Delta y=$	$\Delta z=$	$[ll \cdot 3]$	$[ls \cdot 3]$	R(17) — R(18). Formulele (41) de control
20				$-\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$			Rezolvarea ecuațiilor reduse (12), (6) și (2)
21			$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\Delta z$	$-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$			
22		$-\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y-$	$\frac{[ac]}{[aa]}\Delta z$	$-\frac{[al]}{[aa]}$			
23	$s]$					$[ss]$	Formulele (39) de control
24						$\frac{[as]}{[aa]}\times[as]$	Ultimul element din R(2) $\times$ cu ultimul element din R(1)
25	$s \cdot 1]$					$[ss \cdot 1]$	R(23) — R(24). Formula (41) de control
26						$\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\times[bs \cdot 1]$	Al treilea element R(6) $\times$ cu ultimul element din R(5)
27	$s \cdot 2]$					$[ss \cdot 2]$	R(25) — R(26). Formulele (40) de control
28						$\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}\times[cs \cdot 2]$	Al doilea element R(12) $\times$ cu elementul din R(11)
29	$s \cdot 3]$					$[ss \cdot 3]$	R(27) — R(28). Formula (41) de control

Exemplu numeric. Să considerăm un şir de unghiuri măsurate, formate de patru direcţii care pleacă toate din acelaşi punct O (fig. 12), măsurătorile fiind efectuate cu aceeaşi precizie. S-a obţinut

$$\alpha_1 = \sphericalangle AOB = 112°25'37'' ; \quad \alpha_2 = \sphericalangle BOC = 84°19'48'' ;$$
$$\alpha_3 = \sphericalangle COD = 87°34'24'' ; \quad \alpha_4 = \sphericalangle DOA = 75°40'41'' ;$$
$$\alpha_5 = \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 196°45'15'' ; \quad \alpha_6 = \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA = 163°14'17''.$$

Ni se cere să determinăm valorile cele mai probabile ale unghiurilor $\alpha_1 = \sphericalangle AOB$, $\alpha_2 = \sphericalangle BOC$, $\alpha_3 = \sphericalangle COD$, după metoda celor mai mici pătrate, şi să determinăm erorile medii pătratice ale acestor măsurători individuale, precum şi eroarea medie pătratică a sumei celor trei unghiuri.

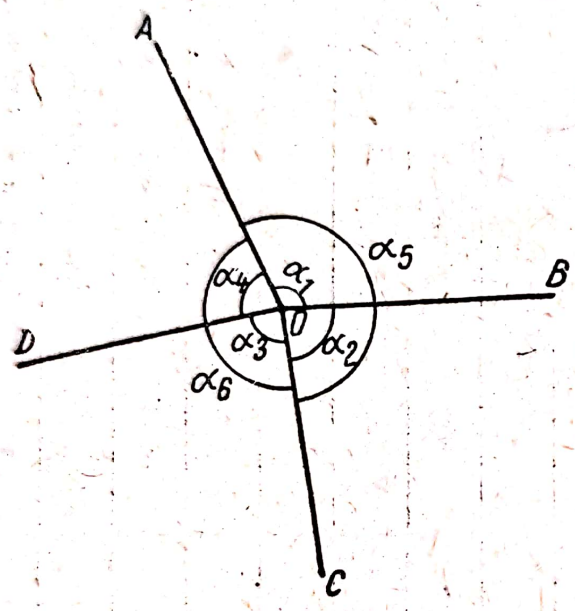


Fig. 12

Stabilirea ecuaţiilor erorilor şi a ecuaţiilor normale. În acest scop, notăm valorile căutate prin x, y, z, considerîndu-le ca fiind trei variabile independente. După datele experimentale de mai sus, ecuaţiile erorilor sînt

$$\begin{aligned}
&1)\quad x + 0\cdot y + 0\cdot z - 112°25'37'' = v_1\\
&2)\quad 0\cdot x + y + 0\cdot z - 84°19'48'' = v_2\\
&3)\quad 0\cdot x + 0\cdot y + z - 87°34'24'' = v_3\\
&4)\quad -x - y - z + 284°19'19'' = v_4\\
&5)\quad x + y + 0\cdot z - 196°45'15'' = v_5\\
&6)\quad -x - y + 0\cdot z + 196°45'43'' = v_6.
\end{aligned}$$

Pentru a simplifica calculul, introducem valori rotunjite pentru necunoscute, după cum am specificat în § 117; punem

$$\left.\begin{aligned} x &= 112°25'40'' + \Delta x\\ y &= 84°19'50'' + \Delta y\\ z &= 87°34'20'' + \Delta z. \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

În modul acesta, se pot scrie următoarele ecuaţii de erori simplificate [§ 117, ecuaţiile (119)]

$$\left.\begin{aligned}
&1)\quad \Delta x + 0\cdot\Delta y + 0\cdot\Delta z + 3'' = v_1\\
&2)\quad 0\cdot\Delta x + \Delta y + 0\cdot\Delta z + 2'' = v_2\\
&3)\quad 0\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y + \Delta z - 4'' = v_3\\
&4)\quad -\Delta x - \Delta y - \Delta z - 31'' = v_4\\
&5)\quad \Delta x + \Delta y + 0\cdot\Delta z + 15'' = v_5\\
&6)\quad -\Delta x - \Delta y + 0\cdot\Delta z + 13'' = v_6.
\end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru uşurinţa calculului să luăm ca unitate zece secunde, atît pentru termenii liberi cît şi pentru necunoscute. În acest mod, ecuaţiile erorilor (158) devin

$$\left.\begin{array}{rl} 1) & \Delta x+0\cdot\Delta y+0\cdot\Delta z+0{,}3=v_1\\ 2) & 0\cdot\Delta x+\Delta y+0\cdot\Delta z+0{,}2=v_2\\ 3) & 0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\Delta z-0{,}4=v_3\\ 4) & -\Delta x-\Delta y-\Delta z-3{,}1=v_4\\ 5) & \Delta x+\Delta y+0\cdot\Delta z+1{,}5=v_5\\ 6) & -\Delta x-\Delta y+0\cdot\Delta z+1{,}3=v_6. \end{array}\right\} \qquad (159')$$

Pentru calculul coeficienţilor ecuaţiilor normale se întocmeşte schema din tabela 4 (v. şi § 112).

Pentru controlul calculului se utilizează formulele (§ 112)

$$\begin{array}{l} [a]+[b]+[c]+[l]=[s]\cdots\cdots-0{,}2=-0{,}2\\ [aa]+[ab]+[ac]+[al]=[as]\cdots\cdots+4+3+1+3{,}6=+11{,}6\\ [ab]+[bb]+[bc]+[bl]=[bs]\cdots\cdots+3+4+1+3{,}5=+11{,}5\\ [ac]+[bc]+[cc]+[cl]=[cs]\cdots\cdots+1+1+2+2{,}7=+6{,}7\\ [al]+[bl]+[cl]+[ll]=[ls]\cdots\cdots+3{,}6+3{,}5+2{,}7+13{,}84=+23{,}64\\ [as]+[bs]+[cs]+[ls]=[ss]\cdots\cdots+11{,}6+11{,}5+6{,}7+23{,}64=+53{,}44. \end{array}$$

Ecuaţiile normale sînt, prin urmare,

$$\left.\begin{array}{l} +4\cdot\Delta x+3\cdot\Delta y+1\cdot\Delta z+3{,}6=0\\ +3\cdot\Delta x+4\cdot\Delta y+1\cdot\Delta z+3{,}5=0\\ +1\cdot\Delta x+1\cdot\Delta y+2\cdot\Delta z+2{,}7=0. \end{array}\right\} \qquad (160)$$

Rezolvarea ecuaţiilor normale. Pentru a exemplifica teoria dezvoltată în paragrafele anterioare, tratăm problema atît prin metoda determinanţilor cît şi prin metoda eliminărilor succesive a lui Gauss.

Metoda determinanţilor. Ecuaţiile (160) avînd coeficienţii necunoscutelor daţi prin numere simple (cu puţine cifre semnificative), sistemul se rezolvă uşor prin metoda algebrică a determinanţilor (§ 113). De asemenea, ponderile necunoscutelor se determină uşor tot prin această metodă. Formulele (89) şi (90) ne dau, cu coeficienţii ecuaţiilor (160)

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=+12{,}0,$$

$$D_x=-\begin{vmatrix} 3{,}6 & 3 & 1\\ 3{,}5 & 4 & 1\\ 2{,}7 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-5{,}0,\quad D_y=-\begin{vmatrix} 4 & 3{,}6 & 1\\ 3 & 3{,}5 & 1\\ 1 & 2{,}7 & 2 \end{vmatrix}=-3{,}8,\quad D_z=-\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3{,}6\\ 3 & 4 & 3{,}5\\ 1 & 1 & 2{,}7 \end{vmatrix}=-11{,}8$$

Prin urmare, după (91) avem soluţiile

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x=-\dfrac{5{,}0}{12{,}0}=-0{,}417 \text{ zeci de secunde}=-4'',17\approx-4'',2\\ \Delta y=-\dfrac{3{,}8}{12{,}0}=-0{,}317 \text{ zeci de secunde}=-3'',17\approx-3'',2\\ \Delta z=-\dfrac{11{,}8}{12{,}0}=-0{,}983 \text{ zeci de secunde}=-9'',83\approx-9'',8, \end{array}\right\} \qquad (161)$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 4

Nr.	a	b	c	l	s	aa	ab	ac	al	as
1	1	0	0	0,3	1,3	1	0	0	0,3	1,3
2	0	1	0	0,2	1,2	0	0	0	0	0
3	0	0	1	—0,4	0,6	0	0	0	0	0
4	—1	—1	—1	—3,1	—6,1	1	1	1	3,1	6,1
5	1	1	0	1,5	3,5	1	1	0	1,5	3,5
6	—1	—1	0	1,3	—0,7	1	1	0	—1,3	0,7
[ ]	0	0	0	—0,2	—0,2	+4	+3	+1	+3,6	+11,6

deoarece, după cum am specificat la început, valorile de unghi care figurează în ecuațiile erorilor și normale se referă la o unitate egală cu zece secunde.

Metoda lui Gauss. Repetăm rezolvarea ecuațiilor normale prin metoda eliminărilor succesive, pentru a concretiza teoria.

Din schema I extragem

$$\left.\begin{aligned} [aa]=+4,\ [ab]=+3,\ [ac]=+1,\ [al]=+3{,}6,\\ [bb]=+4,\ [bc]=+1,\ [bl]=+3{,}5,\\ [cc]=+2,\ [cl]=+2{,}7,\\ [ll]=+13{,}84. \end{aligned}\right\} \quad (162)$$

Cu aceste valori construim simbolurile succesive. Avem după prima eliminare (§ 111)

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot 1]&=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=4-\frac{3\cdot 3}{4}=\frac{7}{4}=1{,}75\\ [bc\cdot 1]&=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}=1-\frac{3\cdot 1}{4}=\frac{1}{4}=0{,}25\\ [bl\cdot 1]&=[bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}=3{,}5-\frac{3\cdot 3{,}6}{4}=\frac{3{,}2}{4}=0{,}8\\ [cc\cdot 1]&=[cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}=2-\frac{1\cdot 1}{4}=\frac{7}{4}=1{,}75\\ [cl\cdot 1]&=[cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}=2{,}7-\frac{1\cdot 3{,}6}{4}=\frac{7{,}2}{4}=1{,}8. \end{aligned}\right\} \quad (163)$$

Scanned with OKEN Scanner

Schema I

bb	*bc*	*bl*	*bs*	*cc*	*cl*	*cs*	*ll*	*ls*	*ss*
0	0	0	0	0	0	0	0,09	0,39	1,09
1	0	0,2	1,2	0	0	0	0,04	0,24	1,44
0	0	0	0	1	−0,4	0,6	0,16	− 0,24	0,38
1	1	3,1	6,1	1	3,1	6,1	9,61	18,91	37,21
1	0	1,5	3,5	0	0	0	2,25	5,25	12,25
1	0	−13	0,7	0	0	0	1,69	− 0,91	0,49
+4	+1	+3,5	+11,5	+2	+2,7	+6,7	+13,84	+23,64	+53,44

După a doua eliminare, obținem

$$\left.\begin{aligned}[cc\cdot 2]&=[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=1{,}75-\frac{0{,}25\cdot 0{,}25}{1{,}75}=1{,}71\\ [cl\cdot 2]&=[cl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=1{,}8-\frac{0{,}25\cdot 0{,}8}{1{,}75}=1{,}69.\end{aligned}\right\}\qquad(164)$$

Formula (30) ne dă

$$\Delta z=-\frac{1{,}69}{1{,}71}=-0{,}984,\ \text{deci în secunde}\ -9'',84;$$

rezultă din (26)

$$\Delta y=-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\ \Delta z-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}984}{1{,}75}-\frac{0{,}8}{1{,}75}=-0{,}316;$$

așadar, în secunde $\Delta y=-3'',16$.
Din prima ecuație (20) rezultă

$$\Delta x=-\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y-\frac{[ac]}{[aa]}\Delta z-\frac{[al]}{[aa]}=+\frac{3\cdot 0{,}316}{4}+\frac{0{,}984}{4}-\frac{3{,}6}{4}=$$
$$=-0{,}417\ \text{zeci de secunde;}$$

așadar, $\Delta x=-4'',17$,

Scanned with OKEN Scanner

Aceste rezultate sînt în bună concordanţă cu cele găsite prin metoda determinanţilor (161).

Determinarea ponderilor şi erorilor medii pătratice. Aplicăm cele două metode dezvoltate anterior.

1. Metoda determinanţilor (§ 113). Formulele (94) ne dau

$$\frac{1}{p_x}=\frac{\begin{vmatrix}4 & & 1\\ 1 & & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}4 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{7}{12}\,;\quad \text{prin urmare, } p_x=\frac{12}{7}=1{,}71$$

$$\frac{1}{p_y}=\frac{\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}}{12}=\frac{7}{12}\,;\quad \text{prin urmare, } p_y=\frac{12}{7}=1{,}71$$

$$\frac{1}{p_z}=\frac{\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}}{12}=\frac{7}{12}\,;\quad \text{prin urmare, } p_z=\frac{12}{7}=1{,}71.$$

Aşadar, $p_x=p_y=p_z=1{,}71$; deci ponderile sînt egale.

Verificarea calculului (§ 113). Formulele (97) ne dau

$$S_2=3+4+1=8,\quad S=1+1+2=4;$$

iar formula (99) ne dă

$$8\left(\frac{7}{12}-\frac{15}{12}-\frac{1}{12}\right)+8\left(-\frac{5}{12}+\frac{7}{12}-\frac{1}{12}\right)+4\left(-\frac{1}{12}-\frac{1}{12}+\frac{7}{12}\right)=\frac{36}{12}=3\,.$$

Metoda lui Gauss. Formula (73) ne dă cu valorile (164)

$$p_z=[cc\cdot 2]_z=1{,}71\,.$$

Formula (80) ne dă cu valorile (162) şi (163)

$$p_y=1{,}71\cdot\frac{1{,}75}{1{,}75}=1{,}71=p_z,$$

iar formulele (82) şi (84) ne dau

$$p_x=[aa\cdot 2]_x=[aa\cdot 1]_x-\frac{[ab\cdot 1]_x^2}{[bb\cdot 1]_x}=\frac{7}{2}-\frac{\frac{25}{4}}{\frac{7}{2}}=\frac{7}{4}-\frac{25}{14}=\frac{12}{7}=1{,}71\,,$$

căci

$$[aa\cdot 1]_x=[aa]-\frac{[ac]^2}{[cc]}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$$

$$[ab\cdot 1]_x=[ab]-\frac{[ac]\,[bc]}{[cc]}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$[bb\cdot 1]_x=[bb]-\frac{[cb]^2}{[cc]}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2},$$

prin urmare, în concordanţă cu rezultatul anterior,

Scanned with OKEN Scanner

Pentru calculul erorilor medii pătratice, utilizăm formulele (127) și (129), luînd, după cum am specificat, eroarea medie pătratică a determinărilor inițiale m ca eroare a unității de pondere.

După formula (127) avem în cazul nostru (ponderi egale)

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[v\,v\,p]}{n-r}} = \pm\sqrt{p}\sqrt{\frac{[vv]}{n-r}},$$

deci

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{p}} = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-r}} = \pm\sqrt{\frac{8{,}57}{6-3}} = \pm 1{,}69 \text{ zeci secunde};$$

așadar

$$m = \pm 16{,}9''.$$

Valoarea lui $[vv]$ se calculează după una dintre formulele cunoscute (§ 116); ea este 8,57. Apoi, avem $n=6$, căci avem șase măsurători dintre care $r=3$ sînt suplimentare. Pentru erorile medii pătratice ale necunoscutelor, după (142), rezultă

$$m_x = m_y = m_z = \pm\frac{16{,}9''}{\sqrt{1{,}71}} = \pm 12{,}9''.$$

Aplicînd corecțiile (161) valorilor inițiale rotunjite (158), deducem rezultatul definitiv

$$\alpha_1 = \sphericalangle AOB = 112°25'35'',8 \quad \sphericalangle DOA = 75°40'27'',2$$
$$\alpha_2 = \sphericalangle BOC = 84°19'46'',8 \quad \sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 196°45'22'',6$$
$$\alpha_3 = \sphericalangle COD = 87°34'10'',2 \quad \sphericalangle COD + \sphericalangle DOA = 163°14'37'',4.$$

Determinarea preciziei sumei celor trei unghiuri $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. În acest scop, aplicăm formula (147) pentru determinarea erorii medii pătratice a valorii unghiului

$$f = \sphericalangle DOA = 360° - (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) = 75°40'27'',2,$$

considerată ca o funcție (131) de variabilele $x=\alpha_1$, $y=\alpha_2$, $z=\alpha_3$. Comparînd cu (131), avem $A_1=A_2=A_3=-1$, iar după (145) și după (162)—(164).

$$(A_2 \cdot 1) = -\frac{1}{4},\ (A_3 \cdot 1) = -\frac{3}{4},\ (A_3 \cdot 2) = -\frac{5}{9}.$$

Cu aceste date, formula (147) ne dă

$$m_f^2 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28} + \frac{25}{83{,}99}\right)m^2 = 0{,}584\,m^2,$$

deci

$$m_f = 0{,}726\,m = \pm 12{,}9'',$$

valoare găsită și prin metoda precedentă; deci

$$\sphericalangle DOA = 75°40'27'',2 \pm 12{,}9''.$$

Aplicarea schemei de calcul din tabela 3 ca exemplu pentru cazul a trei variabile, la exemplul numeric tratat mai sus. În căsuțele respective din schemă înscriem numerele care corespund simbolurilor respective (tabela 5). În ultima coloană repetăm modul de formare a elementelor respective.

Tabela 5. **Schema II aplicată la**

Nr. R.	Denumirea rîndului	1	2	3	4
		[a	[b	[c	[l
1	a]	+4,00	+3,00	+1,00	+ 3,60
2			+0,75	+ 0,25	+ 0,90
3	b]		+4,00	+1,00	+ 3,50
4			+2,25	+0,75	+ 2,70
5	b · 1]		+1,75	+0,25	+ 0,80
6				+0,143	+ 0,457
7	c]			+ 2,00	+ 2,70
8				+ 0,25	+ 0,90
9	c · 1]			+ 1,75	+ 1,80
10				+ 0,04	+ 0,11
11	c · 2]			+ 1,71	+ 1,69
12					+ 0,984
13	l]				+13,84
14					+ 3,24
15	l · 1]				+10,60
16					+ 0,37
17	l · 2]				+10,53
18					+ 1,66
19	l · 3]	$\underline{\Delta x}$	$\underline{\Delta y}$	$\underline{\Delta z}$	+ 8,57=
20				−0,984	
21			−0,316=	+0,141	− 0,457
22		−0,417=	+0,237	+0,246	− 0,900
23	s]				
24					
25	s · 1]				
26					
27	s · 2]				
28					
29	s · 3]				

Scanned with OKEN Scanner

sistemul de ecuații normale (160)

5 [s	Modul de construire a elementelor schemei
+11,60	Coeficienții primei ecuații normale (160)
+ 2,90	R(1) : primul coeficient = Coeficienții primei ecuații normală redusă
+11,50	Coeficienții ecuației a doua normală fără primul
+ 8,70	Primul număr din R(2) × cu R(1), începînd cu cel de deasupra lui
+ 2,80	R(3) — R(4) = Coeficienții ecuației 1-a normală transformată
+ 1,60	R(5) : primul coeficient = coeficienții ecuației a doua normală redusă
+ 6,70	Coeficienții ecuației a treia normală
+ 2,90	Al doilea număr din R(2) × cu R(1), începînd cu cel de deasupra lui
+ 3,80	R(7) — R(8) = Coeficienții ecuației a 2-a normală transformată
+ 0,40	Primul număr din R(6) × R(5), începînd cu cel de deasupra lui
+ 3,40	R(9) — R(10) = Coeficienții ecuației a treia normală transformată
+ 1,984	R(11): primul coeficient=coeficienții ecuației a treia normală redusă
+23,64	Control
+10,44	Al treilea număr din R(2) × cu numerele R(1)
+13,20	R(13) — R(14). Control
+ 1,28	Al doilea număr din R(6) × cu numerele R(5)
+11,92	R(15) — R(16). Control
+ 3,35	Primul număr din R(12) × cu numerele R(11)
+ 8,57	R(17) — R(18). Control
	Rezolvarea ecuațiilor reduse
+53,44	Control. Formula (39)
+33,64	Ultimele numere din R(2) și R(1) înmulțite
+19,80	R(23) — R(24). Control, formula (39)
+ 4,48	Al 3-lea număr din R(6) × cu numerele R(5)
+15,32	R(25) — R(26). Control, formula (40).
+ 6,75	Al 2-lea număr din R(12) × cu numerele R(11)
+ 8,57	R(27) — R(28). Control, formula (41)

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 6. **Schema simplificată**

Nr. R.	Denumirea rîndului	1	2	3	4
		$[a$	$[b$	$[c$	$[l$
1	$a]$		$[ab]$	$[ac]$	$[al]$
2			$-\frac{[ab]}{[aa]}$	$-\frac{[ac]}{[aa]}$	$-\frac{[al]}{[aa]}$
3	$b]$		$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$
4			$-\frac{[ab]}{[aa]}\times[ab]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}\times[ac]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}\times[al]$
5	$b\cdot 1]$		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$
6				$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
7	$c]$			$[cc]$	$[cl]$
8				$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[al]$
10				$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$
11	$c\cdot 2]$			$[cc\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$
12					$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
13	$l]$				$[ll]$
14					$-\frac{[al]}{[aa]}[al]$
16					$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$
18					$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cl\cdot 2]$
19	$l\cdot 3]$	$\Delta x=$	$\Delta y=$ ↓	$\Delta z=$ ↓	$[ll\cdot 3]=$
20				$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	
21			$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\Delta z$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	
22		$-\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y$	$-\frac{[ac]}{[aa]}\Delta z$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	
23	$s]$				
24					
26					
28					
29	$s\cdot 3]$				

Scanned with OKEN Scanner

5 [s	Modul de construire a elementelor schemei
$[as]$	Coeficienţii primei ecuaţii normale
$-\frac{[as]}{[aa]}$	Coeficienţii primei ecuaţii redusă cu semn schimbat
$[bs]$	Coeficienţii ecuaţiei a doua normală, fără primul
$-\frac{[ab]}{[aa]}\times[as]$	Elementul R(2), col. 2 × cu elementul R(1), începînd cu cel de deasupra
$[bs \cdot 1]$	R(3) + R(4)
$-\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	Coeficienţii ecuaţiei a doua redusă cu semn schimbat
$[cs]$	Coeficienţii ecuaţiei a treia normală, fără primii doi
$\frac{[ac]}{[aa]}[as]$	Al doilea element din R(2) × cu celelalte elemente din R(1), începînd cu cel de deasupra lui
$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bs \cdot 1]$	Primul element din R(6) × cu elementele R(5) începînd cu cel de deasupra lui
$[cs \cdot 2]$	R(7) = R(8) + R(10)
$-\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$	Coeficienţii ecuaţiei a treia redusă cu semn schimbat
$[ls]$	Control, formulele (37)
$-\frac{[al]}{[aa]}[as]$	Al treilea element din R(2) × cu elementele R(1), începînd cu cel de deasupra lui
$-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bs \cdot 1]$	Al doilea element din R(6) × cu elementele R(5), începînd cu cel de deasupra lui
$-\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cs \cdot 2]$	Primul element din R(12) × cu elementele din R(11), începînd cu cel de deasupra lui
$[ls \cdot 3]$	Control R(13) + R(14) + R(16) + R(18)
	Rezolvarea ecuaţilor reduse (12), (6) şi (2)
$[ss]$	Control, formula (31)
$-\frac{[as]}{[aa]}[as]$	Ultimul element din R(2) × cu ultimul element din R(1), cu semn schimbat
$-\frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}[bs \cdot 1]$	Elementul al 3-lea din R(6) × cu elementul al 4-lea din R(5) cu semn schimbat
$-\frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}[cs \cdot 2]$	Elementul al 2-lea din R(12) × cu elementul al 4-lea din R(11) cu semn schimbat
$[ss \cdot 3]$	Control, R(23) + R(24) + R(26) + R(28)

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 7. **Schema III, aplicată**

Nr. R.	Denumirea rîndului	1 [a	2 [b	3 [c	4 [l
1	a]	+4,00	+ 3,00	+ 1,00	+ 3,60
2			— 0,75	— 0,25	— 0,90
3	b]		+ 4,00	+ 1,00	+ 3,50
4			— 2,25	— 0,75	— 2,70
5	b · 1]		+ 1,75	+ 0,25	+ 0,80
6				— 0,143	— 0,457
7	c]			+ 2,00	+ 2,70
8				— 0,25	— 0,90
10				— 0,04	— 0,11
11	c · 2]			+ 1,71	+ 1,69
12					— 0,984
13	l]				+13,48
14					— 3,24
16					— 0,37
18					— 1,66
19	l · 3]	$\Delta x =$	$\Delta y =$	$\Delta z =$	+ 8,57
20				−0,984	
21			−0,316 =	+6,141	— 0,457
22		−0,417 =	+0,237	+0,246	— 0,900
23	s]				
24					
26					
28					
29	s · 3]				

Scanned with OKEN Scanner

la ecuațiile normale (160)

$[s]^5$	Modul de construire a numerelor schemei
+11,60	Coeficienții ecuației 1-a normală
− 2,90	Coeficienții ecuației 1-a redusă, cu semn schimbat
+11,50	Coeficienții ecuației a 2-a normală, fără primul
− 8,70	Numărul din rîndul (2), col. 2 × cu numerele rîndului (1).
+ 2,80	Rîndul (3) + (4)
− 1,60	Coeficienții ecuației a 2-a redusă cu semn schimbat
+ 6,70	Coeficienții ecuației a 3-a normală, fără primii doi
− 2,90	Nr. 2 din rînd (2) × cu numerele rînd (1)
− 0,40	Nr. 1 din rînd (6) × cu numerele rînd (5)
+ 3,40	Rînd (7) + (8) + (10)
− 1,984	Coefcienții ecuației a 3-a redusă, cu semn schimbat
+23,64	Elementul 3 rînd (2) × cu elementul rînd (1)
−10,44	Al doilea număr rînd (6) × cu numerele rînd (5)
− 1,28	Al doilea număr rînd (6) × cu numerele rîndului (5)
− 3,35	Primul număr rînd (12) × cu numerele rîndului (11)
+ 8,57	Rînd (13) + (14) + (16) + (18)
}	Rezolvarea ecuațiilor normale reduse
+53,44	Control, formula (39)
−33,64	Ultimul număr rînd (2) × cu ultimul număr din rîndul (1)
− 4,48	Al 3-lea număr rînd (6) × cu număr rînd (5)
− 6,75	Al 2-lea număr rînd (12) × cu numărul din rîndul (11)
+ 8,57	Rînd (23) + (24) + (26) + (28). Control

Scanned with OKEN Scanner

Schema Gauss simplificată — Schema Gauss III (tabela 6). Dacă numărul necunoscutelor este foarte mare, se întrebuinţează o schemă dedusă din *schema Gauss II* prin simplificarea ei şi anume prin eliminarea unor rînduri din schemă şi aranjarea mai simplă a calculelor.

Ca exemplificare redăm schema III pentru trei variabile, cum am făcut şi cu schema II: dar avantajul schemei III reiese numai pentru un număr foarte mare de necunoscute.

După cum rezultă din examinarea schemelor III şi II, aproape toate rîndurile se formează la fel, cu unele deosebiri. Rîndurile 2, 4, 6, 8, 12, 14, 16, 18. 24, 26, 28 se scriu cu semnul schimbat, pentru a se înlocui scăderea aritmetică prin adunarea algebrică, avînd avantajul că pune imediat în evidenţă operaţia scăderii, fără a mai fi nevoie să recurgem la reamintirea formulei respective. Apoi, rîndurile intermediare 9, 15, 17, 25 şi 27 se suprimă, deoarece ele servesc numai la construirea rîndurilor următoare care pot fi deduse şi direct. În special, se suprimă cele mai multe rînduri din compartimentele formulelor de control.

Astfel, pentru obţinerea rîndului 11, adunăm direct (algebric) rîndurile 7, 8 şi 10, fără a mai fi nevoie să scriem rîndul 9. Acelaşi lucru se remarcă şi la obţinerea rîndului 19 din adunarea algebrică a rîndurilor 13, 14, 16 şi 18, fără a mai fi nevoie de înscrierea rîndurilor 15 şi 17.

În mod analog, rîndul final de control 28 se obţine adunînd algebric rîndurile 23, 24, 26 şi 28, prin suprimarea rîndurilor intermediare 25 şi 27.

În ceea ce priveşte rezolvarea ecuaţiilor reduse, ea urmează a se efectua exact ca şi pe schema II, toţi coeficienţii necesari acestei rezolvări figurînd în schemă, după cum se vede. În tabela 7, schema III este aplicată la exemplul numeric anterior.

Calculul de eliminare cu ajutorul logaritmilor. Schema logaritmică. În timpul în care nu existau mijloace tehnice de calcul numeric rapid, cum sînt actualmente riglele de calcul şi maşinile de calcul, ca şi acum, oridecîteori este necesar să se efectueze calculele pe teren, în lipsa mijloacelor tehnice de calcul, s-a recurs la calculul cu ajutorul logaritmilor. Astfel de calcule se întîlnesc în numeroase lucrări vechi.

Ca şi pentru calculul obişnuit, calculul cu logaritmi se organizează, pentru a fi mai comod, prin alcătuirea unei scheme, numită *schemă logaritmică* şi care nu diferă prea mult de schema II, descrisă mai înainte.

Scanned with OKEN Scanner

Calculul cu tabelele de logaritmi se uşurează prin construirea unor liste ajutătoare de calcul, care sînt scrise pe fîşii de hîrtie separate de schemă şi care pot fi deplasate după voie pe schemă. Redăm mai jos modul de construire şi mînuire a listelor ajutătoare, precum şi modul de alcătuire a schemei logaritmice, pentru cazul a trei variabile, după care o vom aplica la exemplul numeric tratat mai sus.

După ce s-au înscris în rîndul 1 al schemei coeficienţii primei ecuaţii normale, ca şi în schema II, se înscriu în rîndul 2 al schemei logaritmii numerelor din rîndul 1. Acest rînd ne permite alcătuirea rîndului 1 din prima listă ajutătoare, pe care o numim lista (A) şi pe care o redăm în tabela 8.

Pentru formarea elementelor care figurează în lista (A) nu este necesar să se calculeze separat logaritmii ce figurează în listă, ci se procedează precum urmează. După ce s-a calculat cologaritmul lui $[aa]$, care se înscrie în primul rînd şi în prima coloană a listei (A), pentru calculul celorlalte elemente se deplasează lista (A) pe schemă cu o coloană spre dreapta, astfel încît coloana 1 a listei să coincidă cu coloana 2 a schemei, iar rîndul 1 al listei să fie aşezat sub rîndul 2 al schemei. Adunînd primele două numere astfel suprapuse, $\lg[ab]+\operatorname{colg}[aa]$, se obţine al doilea element al listei (A). Încă o deplasare spre dreapta cu o coloană ne dă al treilea element al listei (A) şi aşa mai departe, formăm întreg rîndul 1 al acestei liste.

Al doilea rînd al listei (A) se formează aşezînd lista astfel încît rîndul 1 al listei să fie sub rîndul 2 al schemei, iar coloanele să coincidă. Adunînd elementele suprapuse din listă şi schemă, obţinem rîndul 2 al listei (A).

Sub fiecare element al rîndului 2 al listei (A) înscriem numerele care corespund logaritmilor respectivi; am notat aceşti antilogaritmi prin A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25}, indicînd astfel lista (A), precum şi rîndul (primul indice) şi coloana (al doilea indice).

Rîndul 3 al listei (A) se construieşte la fel, după ce s-a deplasat lista cu o coloană spre dreapta, astfel încît coloana 2 a listei să coincidă cu coloana 3 a schemei. Antilogaritmii sînt notaţi cu A_{33}, A_{34}, A_{35}.

Rîndul 4 al listei (A) se construieşte în mod analog, după ce s-a deplasat lista cu încă o coloană spre dreapta, astfel încît coloana 2 a listei să coincidă cu coloana 4 a schemei. Antilogaritmii sînt notaţi cu A_{44}, A_{45}.

În sfîrşit, rîndul 5 al listei (A) se obţine aşezînd lista cu coloana 2 pe coloana 5 a schemei. Antilogaritmul este A_{55}.

Scanned with OKEN Scanner

Lista ajutătoare (B) se construieşte la fel, dar pornind de la rîndul 6 al schemei, în loc de rîndul 2, colg$[bb \cdot 1]$ ocupînd coloana 2 a listei (B), celelalte elemente ale rîndului 1 obţinîndu-se prin deplasarea listei (B) cu cîte o coloană spre dreapta şi adunarea cu elementul suprapus al rîndului 5 al schemei (tabela 9).
Pentru formarea celorlalte rînduri ale listei (B) se procedează la fel ca şi pentru lista (A).
În mod analog, se procedează la alcătuirea listei (C), pornind însă de la rîndul 12 al schemei, colg$[cc \cdot 2]$ fiind înscris în rîndul 1, coloana 3 a schemei.
Redăm în tabelele 8, 9 şi 10 listele (A), (B), (C) — în cazul mai multor variabile, fiind necesare mai multe liste — după care putem construi schema logaritmică aşa cum este arătată în tabela 11.
Modul de alcătuire a schemei reiese clar din diagrama schemei, cu ajutorul listelor ajutătoare.
Calculul necunoscutelor cu ajutorul ecuaţiilor normale reduse se face tot cu logaritmii care se găsesc în listele ajutătoare.

Tabela 8. Lista (A) ajutătoare la schema IV.

	Coloana *1*	Coloana *2*	Coloana *3*	Coloana *4*	Coloana *5*
Rîndul 1	colg $[aa]$	$\lg \frac{[ab]}{[aa]}$	$\lg \frac{[ac]}{[aa]}$	$\lg \frac{[al]}{[aa]}$	$\lg \frac{[as]}{[aa]}$
Rîndul 2		$\lg \frac{[ab]}{[aa]} [ab]$	$\lg \frac{[ac]}{[aa]} [ac]$	$\lg \frac{[al]}{[aa]} [al]$	$\lg \frac{[as]}{[aa]} [as]$
Antilogaritmul		$A_{22}=\frac{[ab]}{[aa]} [ab]$	$A_{23}=\frac{[ac]}{[aa]} [ac]$	$A_{24}=\frac{[al]}{[aa]} [al]$	$A_{25}=\frac{[as]}{[aa]} [as]$
Rîndul 3			$\lg \frac{[ab]}{[aa]} [ac]$	$\lg \frac{[ac]}{[aa]} [al]$	$\lg \frac{[al]}{[aa]} [as]$
Antilogaritmul			$A_{33}=\frac{[ab]}{[aa]} [ac]$	$A_{34}=\frac{[ac]}{[aa]} [al]$	$A_{35}=\frac{[al]}{[aa]} [as]$
Rîndul 4				$\lg \frac{[ab]}{[aa]} [al]$	$\lg \frac{[ac]}{[aa]} [as]$
Antilogaritmul				$A_{44}=\frac{[ab]}{[aa]} [al]$	$A_{45}=\frac{[ac]}{[aa]} [as]$
Rîndul 5					$\lg \frac{[ab]}{[aa]} [as]$
Antilogaritmul					$A_{55}=\frac{[ab]}{[aa]} [as]$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 9. Lista *(B)*, ajutătoare la schema IV

	Coloana 1	Coloana 2	Coloana 3	Coloana 4	Coloana 5
Rîndul 1		colg $[bb \cdot 1]$	$\lg \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$\lg \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$\lg \frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$
Rîndul 2 Antiloga-ritmul			$\lg \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bc \cdot 1]$ $B_{23} = \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bc \cdot 1]$	$\lg \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1]$ $B_{24} = \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1]$	$\lg \frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bs \cdot 1]$ $B_{25} = \frac{[bs \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bs \cdot 1]$
Rîndul 3 Antiloga-ritmul				$\lg \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1]$ $B_{34} = \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bl \cdot 1]$	$\lg \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bs \cdot 1]$ $B_{35} = \frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bs \cdot 1]$
Rîndul 4 Antiloga-ritmul					$\lg \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bs \cdot 1]$ $B_{45} = \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} [bs \cdot 1]$

Tabela 10. Lista *(C)*, ajutătoare la schema IV

	Coloana 1	Coloana 2	Coloana 3	Coloana 4	Coloana 5
Rîndul 1			colg $[cc \cdot 2]$	$\lg \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$	$\lg \frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}$
Rîndul 2 Antiloga-ritmul				$\lg \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cl \cdot 2]$ $C_{24} = \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cl \cdot 2]$	$\lg \frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cs \cdot 2]$ $C_{25} = \frac{[cs \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cs \cdot 2]$
Rîndul 3 Antiloga-ritmul					$\lg \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cc \cdot 2]$ $C_{35} = \frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} [cs \cdot 2]$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 11. Schema

Nr. R	Denumirea rîndului	1	2	3	4
		[a	[b	[c	[l
1	a]	[aa]	[ab]	[ac]	[al]
2		lg [aa]	lg [ab]	lg [ac]	lg [al]
3	b]		[bb]	[bc]	[bl]
4			A_{22}	A_{33}	A_{44}
5	b · 1]		[bb · 1]	[bc · 1]	[bl · 1]
6			lg [bb · 1]	lg [bc · 1]	lg [bl · 1]
7	c]			[cc]	[cl]
8				A_{23}	A_{34}
9	c · 1]			[cc · 1]	[cl · 1]
10				B_{23}	B_{34}
11	c · 2]			[cc · 2]	[cl · 2]
12				lg [cc · 2]	lg [cl · 2]
13	l]				[ll]
14					A_{24}
15	l · 1]				[ll · 1]
16					B_{24}
17	l · 2]				[ll · 2]
18					$C_{24}=$
19	l · 3]	Δx	Δy	Δz	[ll · 3]=
20				$-\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}=$	— antilog
21			$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\Delta z$	$-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	Se iau logaritmii
22		$-\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y$	$-\frac{[ac]}{[aa]}\Delta z$	$-\frac{[al]}{[aa]}$	Se iau logaritmii
23	s]				
24					
25	s · 1]				
26					
27	s · 2]				
28					
29	s · 3]				

Scanned with OKEN Scanner

5	
[s	
[as]	Coeficienţii ecuaţiei 1-a normală
lg [as]	
[bs]	Coeficienţii ecuaţiei 2-a normală
A_{55}	Din lista (A).
[bs · 1]	R (3)–R (4). Ecuaţia 1 transformată
lg [bs · 1]	
[cs]	Coeficienţii ecuaţiei 3-a normală
A_{45}	Din lista (A).
[cs · 1]	R (7)–R (8). Ecuaţia 2 transformată
B_{45}	Din lista (B)
[cs · 2]	R (9)–R (10)
lg [cs · 2]	
[ls]	
A_{35}	Din lista (A)
[ls · 1]	R (13)–R (14)
B_{35}	Din lista (B)
[ls · 2]	R (15)–R (16)
C_{35}	Din lista (C)
[ls · 3]	R (17)–R (18)
[cl · 2] [cc · 2]	Din lista (C)

din listele (B) şi (C) şi se formează antilogaritmii.

din listele (A), (B) şi (C) şi se formează antilogaritmii

[ss]	
A_{25}	Din lista (A)
[ss · 1]	R (23)–R (24)
B_{25}	Din lista (B)
[ss · 2]	R (25)–R (26)
C_{25}	Din lista (C)
[ss · 3]	R (27)–R (28)

Scanned with OKEN Scanner

Ca exemplificare redăm schema III pentru trei variabile, cum am făcut și cu schema II: dar avantajul schemei III reiese numai pentru un număr foarte mare de necunoscute.

	Coloana 1	Coloana 2	Coloana 3	Coloana 4	Coloana 5
Lista (A)					
Rîndul 1	$\bar{1},3979$	$\bar{1},8750$	$\bar{1},3979$	$\bar{1},9542$	0,4624
Rîndul 2 Antilogaritmul	. . . .	0,3521 $A_{22}=2,25$	$\bar{1},3979$ $A_{23}=0,25$	0,5105 $A_{24}=3,24$	1,5269 $A_{25}=33,64$
Rîndul 3 Antilogaritmul	. . . .	. . . .	$\bar{1},8750$ $A_{33}=0,75$	$\bar{1},9542$ $A_{34}=0,90$	1,0187 $A_{35}=+10,44$
Rîndul 4 Antilogaritmul	. . . .	. . . .	. . . .	0,4313 $A_{44}=2,70$	0,4624 $A_{45}=+2,90$
Rîndul 5 Antilogaritmul	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	0,9395 $A_{55}=8,70$
Lista (B)					
Rîndul 1		$\bar{1},7570$	$\bar{1},1548$	$\bar{1},6601$	0,2042
Rîndul 2 Antilogaritmul	. . . .	. . . .	$\bar{2},5528$ $B_{23}=0,04$	$\bar{1},5632$ $B_{24}=0,37$	0,6514 $B_{25}=4,48$
Rîndul 3 Antilogaritmul	. . . .	. . . .	. . . .	$\bar{1},0580$ $B_{34}=0,11$	0,1073 $B_{35}=1,28$
Rîndul 4 Antilogaritmul	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	$\bar{1},6021$ $B_{45}=0,40$
Lista (C)					
Rîndul 1			$\bar{1},7660$	$\bar{1},9929$	0,2975
Rîndul 2 Antilogaritmul				0,2198 $C_{24}=1,66$	0,8290 $C_{25}=6,75$
Rîndul 3 Antilogaritmul					0,5244 $C_{35}=3,35$

Scanned with OKEN Scanner

Schema logaritmică

Nr. R.	Denumirea rîndului	1 [a	2 [b	3 [c	4 [l	5 [s	
1	a]	+4,00	+3,00	+1,00	+3,60	+11,60	Ecuaţia 1 (160)
2		0,6021	0,4771	0,000	0,5563	1,0645	
3	b]		+4,00	+1,00	+3,50	+11,50	Ecuaţia 2 normală
4			+2,25	+0,75	+2,70	+ 8,70	
5	b · 1]		+1,75	+0,25	+0,80	+ 2,80	Din lista (A)
6			0,2430	$\bar{1}$,3979	$\bar{1}$,9031	0,1427	R(3) – R(4) Ecuaţia 1 transformată
7	c]			+2,00	+2,70	+ 6,70	Ecuaţia 3 normală
8				+0,25	+0,90	+ 2,90	Din lista (A)
9	c · 1]			+1,75	+1,80	+ 3,80	R(7) — R(8). Ecuaţia 2 transformală
10				+0,04	+0,11	+ 0,40	Din lista (B)
11	c · 2]			+1,71	+1,69	+ 3,40	R(9) — R(10)
12				0,2340	0,2269	0,5315	
13	l]				+13,84	+23,64	
14					+ 3,24	+10,44	Din lista (A)
15	l · 1]				+10,60	+13,20	R (13) — R (14)
16					+ 0,37	+ 1,28	Din lista (B)
17	l · 2]				+10,25	+11,92	R (15) — R (16)
18					+ 1,66	+ 3,35	Din lista (C)
19	l · 3]	Δ x	Δ y	Δ z	+ 8,57	+ 8,57	R (17) — R (18)
20				−0,984	zeci sec = −9",84		Din lista (C)
21			−0,317	zeci sec = −3",17		$\bar{1}$,9929	Rînd (1) col. (4)
22		−0,417	zeci sec = −4",17		$\bar{1}$,1549	0,984=	Antilog ($\bar{1}$,9929)
23	s]			1,8750	$\bar{1}$,9929	+53,44	
24				$\bar{1}$,5011	$\bar{1}$,1478	+33,64	Din lista (A)
25	s · 1]		+0,237	$\bar{1}$,3761 $\bar{1}$,3979	+0,140	+19,80	R (23) — R (24)
26				$\bar{1}$,9928	−0,457	+ 4,48	Din lista (B)
27	s · 2]		+0,246	$\bar{1}$,3908	−0,317	+15,32	R (25) — R (26)
28			−0,900	$\bar{1}$,9542	log 0,317 = +6,75		Din lista (C)
29	s · 3]		−0,417		$\bar{1}$,5011	+8,57	R (27) — R (28)

Schema completă V este construită nu numai pentru calculul coeficienţilor şi rezolvarea ecuaţiilor normale, ci şi pentru calculul ponderilor, respectiv, al parametrilor Q (tabela 12). În alcătuirea

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 12. **Schema completă V. Cazul a trei variabile.**

		1	2	3	4
		$[a$	$[b$	$[c$	$[l$
1	$a]$	$[aa]$	ab	$[ac]$	$[al]$
2		1	$\frac{[ab]}{[aa]}$	$\frac{[ac]}{[aa]}$	$\frac{[al]}{[aa]}$
3	$b]$	$[ab]$	$[bb]$	$[bc]$	$[bl]$
4		$[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}\,[ab]$	$\frac{[ab]}{[aa]}\,[ac]$	$\frac{[ab]}{[aa]}\,[al]$
5	$c]$	$[ac]$	$[bc]$	$[cc]$	$[cl]$
6		$[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}\,[ab]$	$\frac{[ac]}{[aa]}\,[ac]$	$\frac{[ac]}{[aa]}\,[al]$
7	S	S_1	S_2	S_3	S_4
8		S_1	$S_1\frac{[ab]}{[aa]}$	$S_1\frac{[ac]}{[aa]}$	$S_1\frac{[al]}{[aa]}$
9	$b\cdot 1]$		$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$
10			1	$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
11	$c\cdot 1]$		$[bc\cdot 1]$	$[cc\cdot 1]$	$[cl\cdot 1]$
12			$[bc\cdot 1]$	$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,[bc\cdot 1]$	$\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,[bl\cdot 1]$
13	S'		$S_2-S_1\frac{[ab]}{[aa]}$	$S_3-S_1\frac{[ac]}{[aa]}$	$S_4-S_1\frac{[al]}{[aa]}$
14			$\left\{S_2-S_1\frac{[ab]}{[aa]}\right\}\times$	$\times\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$	$\times\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
15	$c\cdot 2]$			$[cc\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$
16				1	$\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$
17	S''			R (13) — R (14)	R (13) — R (14)
18	$\Delta z=$			$-\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}$	
19	$\Delta y=$			$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\Delta z$	$-\frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}$
20	$\Delta x=$		$-\frac{[ab]}{[aa]}\Delta y$	$-\frac{[ac]}{[aa]}\Delta z$	$-\frac{[al]}{[aa]}$
21	$\Sigma_1=$	$S_1\,\Delta x$	$+S_2\,\Delta y$	$+S_3-\Delta z$	$-S_4$
22	$Q_3x=$			— Elem. (16,5)	
23	$Q_2x=$			$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,Q_3x$	
24	$Q_1x=$		$-\frac{[ab]}{[aa]}\,Q_2x$	$-\frac{[ac]}{[aa]}\,Q_3x$	
25	$\Sigma_2=$	$S_1\,Q_1x$	$+S_2\,Q_2x$	$+S_3\,Q_3x$	
26	$Q_3y=$			$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\frac{1}{[cc\cdot 2]}$	
27	$Q_2y=$		$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\,Q_3y$		
28	$\Sigma_3=$		$\left\{S_2-S_1\frac{[ab]}{[aa]}\right\}Q_2y$	$+\left\{S_3-S_1\frac{[ac]}{[aa]}\right\}Q_3y$	
29	Q_3z			$\frac{1}{[cc\cdot 2]}$	

Eroarea medie pătratică a funcției $f = A_1x + A_2y + A_3z$

5	6	7	8	Modul de formare a elementelor schemei
$1/Q_x$	$1/Q_y$	$1/Q_z$	A	
-1			A_1	Ecuația 1 normală
$-\frac{1}{[aa]}$			$\frac{A_1}{[aa]}$	Ecuația 1 redusă
0			A_2	Ecuația 2 normală
$-\frac{[ab]}{[aa]}$			$A_1\frac{[ab]}{[aa]}$	Elementul (3, 1) × Rîndul (2)
0			A_3	Ecuația 3 normală
$-\frac{[ac]}{[aa]}$			$A_1\frac{[ac]}{[aa]}$	Elementul (5, 1) × R(2)
-1			$A_1+A_2+A_3$	Formulele (97)=R(1)+R(3)+R(5)
$-\frac{S_1}{[aa]}$			$S_1\frac{A_1}{[aa]}$	Elementul (7, 1) × R(2)
$+\frac{[ab]}{[aa]}$	-1		$(A_2 \cdot 1)$	R(3)—R(4). Ecuația 1 transformată
$\frac{[ab]}{[aa]}\ \frac{1}{[bb \cdot 1]}$	$\frac{-1}{[bb \cdot 1]}$		$\frac{(A_2 \cdot 1)}{[bb \cdot 1]}$	Elementele R(9): primul element. Ecuația 2 redusă
$\frac{[ac]}{[aa]}$	0		$(A_3 \cdot 1)$	R(5)—R(6) Ecuația 2 transformată
$\frac{[ab]}{[aa]}\ \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$		$(A_2 \cdot 1)\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	Elementele (11, 2) × R(10)
$-1+\frac{S_1}{[aa]}$	-1		$(A_1+A_2+A_3-\frac{M}{[aa]}-S_1\frac{}{[aa]}$	R(7)—R(8)=R(9)+R(11) Control
$\times\frac{[ab]}{[aa]}\ \frac{1}{[bb \cdot 1]}$	$\times\frac{-1}{[bb \cdot 1]}$		$\times\frac{(A_2 \cdot 1)}{[bb \cdot 1]}$	Elementele (13, 2) × R(10)
$\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}\ \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	$\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}$	-1	$(A_3 \cdot 2)$	R(11) — R(12). Ecuația 3 transformată
$\left\{\frac{[ac]}{[aa]}-\frac{[ab]}{[aa]}\ \frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right\}\ \frac{1}{[cc \cdot 2]}$	$\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\ \frac{1}{[cc \cdot 2]}$	$\frac{-1}{[cc \cdot 2]}$	$\frac{(A_3 \cdot 2)}{[cc \cdot 2]}$	Elementele R(15): primul element Ecuația 3 redusă
R (13) — R (14)	R (13) — R (14)	-1	R(13)—R(14)	Control: R(13)—R(14)=R(15)
				Elementele(16,4) cu semn schimbat
Control		Dif Σ_1-S_4		$\Sigma_1=S_1\Delta x+S_2\Delta y+S_3\Delta z$
				Elementele(16,5) cu semn schimbat
$-\frac{[ab]}{[aa]}\ \frac{1}{[bb \cdot 1]}$				
$+\frac{1}{[aa]}$				$P_{1x}=\frac{1}{Q_{1x}}$
+ 1 [Elem. (7,5)]	Control	Dif Σ_2-1		$\Sigma_2=S_1Q_{1x}+S_2Q_{2x}+S_3Q_{3x}$
				Elementele(16,6) cu semn schimbat
	$+\frac{1}{[bb \cdot 1]}$			$P_y=\frac{1}{Q_{2y}}$
	+1,0000	Dif Σ_3-1		$\Sigma_3=\{[bb \cdot 1]+[bc \cdot 1]\}Q_{2y}+\{+[bc \cdot 1]+[cc \cdot 1]\}Q_{3y}$
				$P_z=\frac{1}{Q_{3z}}$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 13. **Ecuațiile normale**

Nr. R.	Denumirea rîndului	1 [a	2 [b	3 [c	4 [l
1	a]	+4	+3	+1	+3,6
2		+1	+0,75	+0,25	+0,90
3	b]	+3	+4	+1	+3,5
4		+3	+2,25	+0,75	+2,7
5	c]	+1	+1	+2	+2,7
6		+1	+0,75	+0,25	+0,90
7	S]	+8	+8	+4	+9,8
8		+8	+6	+2	+7,2
9	b·1]		+1,75	+0,25	+0,80
10			+1,0000	+0,1429	+0,4571
11	c·1]		+0,2500	+1,7500	+1,8000
12			+0,2500	0,0357	+0,1143
13	S·1]		+2,0000	+2,0000	+2,6000
14			+2,0000	+0,2858	+0,9142
15	C·2]			+1,7143	+1,6857
16				+1,0000	+0,9833
17	S·2]			+1,7142	+1,6858
18	$\Delta z =$			−0,9833	
19	$\Delta y =$		−0,3166=	+0,1405	−0,4571
20	$\Delta x =$	−0,4167=	+0,2375	+0,2458	−0,9000
21	$\Sigma_1 =$	−3,3336	−2,5328	−3,9332	−9,8000
22	$Q_{3x} =$			−0,0834	
23	$Q_{2x} =$		−0,4168	+0,0118	
24	$Q_{1x} =$	+0,5834=	+0,3126	+0,0209	
25	$\Sigma_2 =$	+4,6672	−3,3344	−0,3336	
26	$Q_{3y} =$			−0,0834	
27	$Q_{2y} =$		+0,5832=	+0,0118	
28	$z_3 =$		+1,6664	−0,6672	
29	$\Sigma_{3z} =$			+0,5833	

Scanned with OKEN Scanner

(160); funcția $f=360-x-y-z$

5 l/Qx	6 l/Qy	7 l/Qz	8 A	Modul de formare a numerelor
−1			−1	Ecuația 1 normală
−0,25			−0,25	Ecuația 1 redusă
0			−1	Ecuația 2 normală
−0,75			−0,75	+3×R (2).
0			−1	Ecuația 3 normală
−0,25			−0,25	+1×R (2)
−1			−3	R (1)+R (3)+R (5)
−2			−2	+8×R (2)
+0,75	−1,00		−0,25	R (3)−R (4) Ecuația 1 transformată
+0,4286	−0,5714		−0,1429	Numerele rînd. (9) : primul număr (1,75)
+0,2500	0		−0,7500	R (5)−R (6) Ecuația 2 transformată
+0,1071	−0,1428		−0,0357	+0,25×E. (10)
+1,0000	−1,0000		−1,0000	R (7)−R (8)=R (9)+R (11) Control
+0,8572	−1,1428		−0,2858	+2×R (10)
+0,1429	+1,1428	−1,0000	−0,7143	R (11)−R (12) Ecuația 3 transformată
+0,0834	+0,0834	−0,5833	−0,4108	Nr. R (15) : primul număr (1,7143)
+0,1428	+0,1438	−1,0000	−0,7142	R (13)−R (14)=R (15) Control
				Nr. (16,4) cu semn schimbat
				Nr. (10,3)×(18,3)−(10,4)
				Nr. (22)×(19,2)+(2,3)×(18,3)−(2,4)
Control		(+0,0004)		$\Sigma_1=-9,7996$
				Elementele (16,5), cu semn schimbat
−0,4286				
+0,2500				$P_x=\frac{1}{Q_x}=1,71$
+1,0000		(−0,0008)		$\Sigma_2=0,9992$
				Numărul din R (16) col. (6) cu semn schimbat
	+0,5714			$P_y=\frac{1}{Q_{2y}}=1,71$
	+1,0000	(−0,0008)		$\Sigma_3=0,9992$
				$P_z=\frac{1}{Q_{3z}}=1,71$

Scanned with OKEN Scanner

schemei nu se face uz de simetria coeficienților și a ecuațiilor; de aceea, această schemă nu este caracteristică pentru rezolvarea ecuațiilor normale, ci poate fi aplicată la rezolvarea unui sistem oarecare de ecuații algebrice liniare, fiind totodată mai simplă și adaptată calculului erorilor medii pătratice cu ajutorul determinanților. Controlul calculelor este, de asemenea, mai simplu.

Observăm că, pentru determinarea parametrilor de pondere Q, calculul dezvoltat în § 113 se poate simplifica prin faptul că nu este nevoie să se rezolve complet toate cele trei sisteme de ecuații (81), (75) și (63). În adevăr, prin rezolvarea sistemului (81)

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,Q_{1x}+[ab]\,Q_{2x}+[ac]\,Q_{3x}&=1\\ [ab]\,Q_{1x}+[bb]\,Q_{2x}+[bc]\,Q_{3x}&=0\\ [ac]\,Q_{1x}+[bc]\,Q_{2x}+[cc]\,Q_{3x}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (165)$$

se obțin parametrii Q_{1x}, Q_{2x}, Q_{3y}. Dar, pentru a determina pe Q_{2y}, Q_{3y} nu este necesar să rezolvăm întreg sistemul (75), ci ne putem mărgini la primul sistem obținut prin transformare

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot 1]\,Q_{2y}+[bc\cdot 1]\,Q_{3y}&=1\\ [bc\cdot 1]\,Q_{2y}+[cc\cdot 1]\,Q_{3y}&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

din care deducem pe Q_{2y} și Q_{3y} fără dificultate.

În sfîrșit, pentru a găsi pe Q_{3z} luăm direct ecuația obținută după a doua transformare a sistemului (63), care ne dă, după cum știm,

$$[cc\cdot 2]\,Q_{3z}=1. \qquad (167)$$

Această observație este utilizată în construirea schemei pentru partea care privește calculul coeficienților Q.

Atragem atenția asupra notațiilor prescurtate de pe schemă R (14) înseamnă rîndul 14, C (5) înseamnă coloana 5.

Elementul (*12, 3*) înseamnă elementul din rîndul 12 și coloana 3; scriem mai întîi numărul care arată rîndul și apoi numărul coloanei.

Aplicație numerică. Pentru eroarea medie pătratică a funcției $f=360°-x-y-z$ (tabela 13), găsim

$$A_1=A_2=A_3=-1,\quad (A_2\cdot 1)=-0{,}25,\quad (A_3\cdot 1)=-0{,}75,$$
$$(A_3\cdot 2)=-0{,}714\,; \qquad (168)$$

Formula (147) ne dă $m_f=\pm 12{,}9''$,

Scanned with OKEN Scanner

§ 122. Aplicaţie practică de rezolvare a ecuaţiilor normale în cazul măsurătorilor de precizii inegale. Reţea de nivelment

În fig. 13 avem o reţea de nivelment care trebuie compensată după metoda celor mai mici pătrate. Numerele de pe figură indică ordinea corespunzătoare datelor deduse din măsurători, iar săgeţile indică sensul în care diferenţele de nivel sînt pozitive.

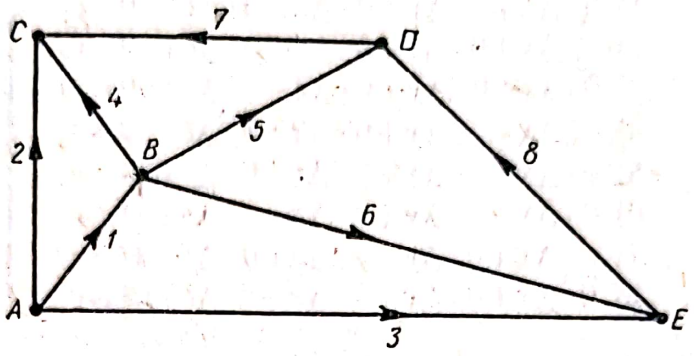


Fig. 13.

Considerăm cunoscută cota unuia dintre puncte, de exemplu a punctului A. Pentru a obţine cotele punctelor B, C, D, E este suficient să cunoaştem patru diferenţe de nivel, pe care le notăm după cum urmează

$$C-A=x, \quad B-A=y, \quad D-A=z, \quad E-A=t. \tag{169}$$

Măsurătorile diferenţelor de nivel şi distanţele dintre punctele respective sînt, după indicaţiile de pe figură, date de tabela următoare:

Numărul care indică diferenţa de nivel	Distanţa respectivă, km	Diferenţa de nivel măsurată, m
1	3,1	189,404
2	9,3	736,977
3	59,7	376,607
4	6,2	547,576
5	16,1	273,528
6	35,1	187,274
7	12,1	274,082
8	9,3	86,261

Cu notaţiile (169), datele cuprinse în tabelă ne conduc la următoarele ecuaţii

$$\left.\begin{aligned} y&=189{,}404 & z-y&=273{,}528\\ x&=736{,}977 & t-y&=187{,}274\\ t&=376{,}607 & x-z&=274{,}082\\ x-y&=547{,}576 & z-t&=86{,}261. \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

Punînd

$$\left.\begin{aligned} x&=736{,}977+\Delta x\\ y&=189{,}404+\Delta y\\ z&=462{,}932+\Delta z\\ t&=376{,}607+\Delta t, \end{aligned}\right\} \qquad (171)$$

se obţin următoarele ecuaţii ale erorilor

$$\left.\begin{aligned} 1)\ & 0\cdot\Delta x+\Delta y+0\cdot\Delta z+0\cdot\Delta t+0=v_1\\ 2)\ & \Delta x+0\cdot\Delta y+0\cdot\Delta z+0\cdot\Delta t+0=v_2\\ 3)\ & 0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+0\cdot\Delta z+\Delta t+0=v_3\\ 4)\ & \Delta x-\Delta y+0\cdot\Delta z+0\cdot\Delta t-3=v_4\\ 5)\ & 0\cdot\Delta x-\Delta y+\Delta z+0\cdot\Delta t+0=v_5\\ 6)\ & 0\cdot\Delta x-\Delta y+0\cdot\Delta z+\Delta t-71=v_6\\ 7)\ & \Delta x+0\cdot\Delta y-\Delta z+0\cdot\Delta t-37=v_7\\ 8)\ & 0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y+\Delta z-\Delta t+64=v_8. \end{aligned}\right\} \qquad (172)$$

Să notăm prin D_i ($i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ este unul dintre numerele indicate pe figură) lungimea distanţei dintre cele două puncte între care s-a făcut diferenţa de nivel, corespunzătoare valorii lui i; pentru măsurătorile efectuate este indicat să se introducă ponderi corespunzătoare, care este natural să fie luate proporţionale cu inversul distanţei respective

$$p_i=\frac{1\,000}{D_i}, \qquad (173)$$

astfel încît, dacă măsurăm distanţele D_i în kilometri, aşa cum se indică în tabela anterioară, luăm ca unitate de pondere acea pondere care corespunde diferenţei de nivel de 1 000 km. După schema de calcul (tabela 12), avem în cazul de faţă

Schema coeficienţilor								Schema preliminară					
Nr. ecuaţii	*a*	*b*	*c*	*d*	*l*	*s*	*p*	*paa*	*pab*	*pac*	*pad*	*pal*	*pas*
1	0	+1	0	0	0	+1	323	0	0	0	0	0	0
2	+1	0	0	0	0	+1	108	+108	0	0	0	0	+108
3	0	0	0	+1	0	+1	17	0	0	0	0	0	0
4	+1	−1	0	0	−3	−3	161	+16	−161	0	0	−483	−483
5	0	−1	+1	0	0	0	62	0	0	0	0	0	0
6	0	−1	0	+1	−71	−71	28	0	0	0	0	0	0
7	+1	0	−1	0	−37	−37	83	+83	0	−83	0	−3071	−3 071
8	0	0	+1	−1	+64	+64	108	0	0	0	0	0	0
	+3	−2	+1	+1	−47	−44		+352	−161	−83	0	−3 554	−3 446

Scanned with OKEN Scanner

După această schemă, ecuațiile normale sînt

$$\left.\begin{aligned} +352\,\Delta x - 161\,\Delta y - 83\,\Delta z + 0\cdot\Delta t - 3\,554 &= 0\\ -161\,\Delta x + 574\,\Delta y - 62\,\Delta z - 28\,\Delta t + 2\,471 &= 0\\ -83\,\Delta x - 62\,\Delta y + 253\,\Delta z - 108\,\Delta t + 9\,983 &= 0\\ 0\,\Delta x - 28\,\Delta y - 108\,\Delta z + 153\,\Delta t - 8\,900 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (174)$$

Rezolvăm aceste ecuații normale după schema completă V cu patru variabile (tabela 14).

Rezolvarea ecuațiilor normale după schema de față ne conduce, așadar, la soluțiile

$$\Delta x = +3{,}600, \quad \Delta y = -3{,}457, \quad \Delta z = -20{,}844, \quad \Delta t = 42{,}824. \qquad (175)$$

Tot din schemă avem parametrii de pondere

$$\left.\begin{aligned} Q_{1x} &= 4199\cdot10^{-6},\ Q_{2x} = 1577\cdot10^{-6},\ Q_{3x} = 2701\cdot10^{-6},\ Q_{4x} = 2195\cdot10^{-6},\\ Q_{1y} &= 1577\cdot10^{-6},\ Q_{2y} = 2475\cdot10^{-6},\ Q_{3y} = 1883\cdot10^{-6},\ Q_{4y} = 1784\cdot10^{-6},\\ Q_{1z} &= 2701\cdot10^{-6},\ Q_{2z} = 1885\cdot10^{-6},\ Q_{3z} = 7797\cdot10^{-6},\ Q_{4z} = 5849\cdot10^{-6},\\ Q_{1t} &= 2195\cdot10^{-6},\ Q_{2t} = 1784\cdot10^{-6},\ Q_{3t} = 5849\cdot10^{-6},\ Q_{4t} = 11001\cdot10^{-6}. \end{aligned}\right\} \qquad (176)$$

Eroarea medie pătratică a unității de pondere este, după formula (128),

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-r}} = \pm\sqrt{\frac{88\,036}{8-4}} = \pm\sqrt{22\,009} = \pm 148 \text{ mm}. \qquad (177)$$

Prin urmare, eroarea medie pătratică ce revine pentru 1 km, este

$$\mu_{1\,km} = \pm\frac{\mu}{\sqrt{1\,000}} = \pm\sqrt{22{,}000} = \pm 4{,}7 \text{ mm}. \qquad (178)$$

Schema preliminară

pbb	*pbc*	*pbd*	*pbl*	*pbs*	*pcc*	*pcd*	*pcl*	*pcs*	*pdd*	*pdl*	*pds*
+323	0	0	0	+323	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	+17	0	+17
+161	0	0	+483	+483	0	0	0	0	0	0	0
+62	−62	0	0	0	+62	0	0	0	0	0	0
+28	0	−28	+1 988	+1 988	0	0	0	0	+28	−1 988	−1 988
0	0	0	0	0	+83	0	+3 071	+3 071	0	0	0
0	0	0	0	0	+108	−108	+6 912	+6 912	+108	−6 912	−6 912
+574	−62	−28	+2471	+2794	+253	−108	+9 983	+9 983	+153	−8 900	−8 883

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 14. Schema completă V. — Aplicații numerice la cazul a patru necunoscute (x, y, z, t) pondere

Nr. R	Denumirea rîndului	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
		[a	[b	[c	[d	[l	l/Qx	l/Qy	l/Qtz	l/Qt	A	
1	a]	+352	−161	−83	0	−3554	−1				1	Ecuația 1 normală
2		+1	−0,45739	−0,2368	0	−10,0945	−0,00284				+0,00284	Ecuația 1 redusă R(2)+(1,1)
3	b]	−161	+574	−62	−28	+2471	0				0	Ecuația 2 normală
4		−161	+73,64	+37,964	0	+1625,6	−0,45739				−0,45739	(3,1)×R(2)
5	c]	−83	−62	+253	−108	+9983	0				0	Ecuația 3 normală
6		−83	+37,964	+19,572	0	+838,03	+0,2358				−0,2358	(5,1)×R(2)
7	d]	0	−28	−108	−153	−8900	0				−1	Ecuația 4 normală
8		0	0	0	0	0	0				0	(7,1)×R(2)
9	S	+108	+323	0	+17	0	−1	Control			0	R(1)+R(3)+R(6)+R(7)
10		+108	−49,38	−25,465	0	−1090,5	−0,3068				+0,3068	(9,1)×R(2)
11	b · 1]		+500,36	−99,964	−28	+845,4	−0,45739	−1			+0,45739	Ecuația 1 transformată R(3)−R(4)
12			1	−0,1998	−0,05596	+1,6895	−0,0009	−0,001998			+0,0009	Ecuația 2 redusă R(11) : (11,2)
13	c · 1]		−99,964	+233,438	−108	+9144,97	−0,2358	0			+0,2358	Ecuația 2 transformată R(5)−R(6)
14			−99,964	+19,97	+5,594	−168,9	+0,09138	+0,1999			−0,09138	(13,2)×R(12)
15	d · 1]		−28	−108	−153	−8900	0	0			−1	Ecuația 3 transformată R(7)×R(8)
16			+28	+5,596	−1,597	−47,31	+0,02598	+0,05596			+0,02598	(15,2)×R(12)
17	S'		+372,38	+25,465	+17	+1090,5	−0,6932	−1	Control		−0,3068	R(9)−R(10)= R(11)+R(13)+R(15)
18			+372,38	−74,39	−20,84	+627,7	−0,3402	−0,7441			+0,3402	(17,2)×R(12)
19	c · 2]			+213,41	−113,594	−9313,87	−0,3272	−0,1999	−1		−0,32718	Ecuația 1 transformată 2° R(13)−R(14)
20				1	−0,5319	+43,61	−0,001538	−0,0094	−0,004696		+0,001532	Ecuația 3 redusă R(19) : R(19,3)
21	d · 2]			−113,596	+151,44	−8852,7	−0,02598	−0,05596			−0,97422	Ecuația 2 transformată 2° R(15)−R(16)
22				−113,596	+60,42	−4954,2	+0,1738	+0,1064	+0,5324		−0,17416	(21,3)×R(20)
23	S"			+99,85	+37,85	+462,0	−0,3532	−0,2559	−1	Control	−0,6470	R(17)−R(19)= =R(19)+R(21)

Scanned with OKEN Scanner

24	$d \cdot 3]$				+91,02	−3898,5	−0,2014	−0,1624	−0,5342	−1	−0,80029	Ecuația 3 transformată 2° R(21)—R(22)
25	$\Delta t =$					+42,824						Ecuația 4 redusă (24,5) : (24,4)
26	$\Delta z =$			−20,844=	+22,766	−43,610						
27	$\Delta y =$		−3,457=	−4,164	+2,396	−1,689						
28	$\Delta x =$	+3,60=	−1,580	−4,914	+0	+10,094						
29	$\Sigma_1 =$		+388,79	−1116,63	+728,10	0					Dif (+0,04)	$\Sigma_1 = S_1\Delta x + S_2\Delta y + S_3\Delta z + S_4\Delta t$
30	$Q_{4x} =$					+2195,10^{-6}						—(24,6) : (24,4)
31	$Q_{3x} =$			+2701·10^{-6}=	+0,001163	+0,001538						
32	$Q_{2x} =$		+1577·10^{-6}=	+0,000544	+0,000123	+0,00091						
33	$Q_{1x} =$		+4199·10^{-6}=	+0,000721	+0,000637	−0,002841						
34	Σ_2		+0,4535	+0,5094	+0,0373		−1	Control			Diferența (+0,0002)	$\Sigma_2 = S_1Q_{1x} + S_2Q_{2x} + S_3Q_{3x} + S_4Q_{4x}$
35	$Q_{4y} =$					+1784,10^{-6}						—(24,7) : (24,4)
36	$Q_{3y} =$			+1883·10^{-6}=	+0,000948	×0,000934						
37	$Q_{2y} =$		+2475·10^{-6}	+0,0003762	−0,000998	+0,001998						
38	$Q_{1y} =$			+1577·10^{-6}=	+0,001139	+0,000438						
39	$\Sigma_3 =$		−0,0016	+0,9216	+0,0491	+0,0303		−1	Control		Diferența (−0,001)	$\Sigma_3 = Q_{1y} + S_2'Q_{2y} + S_3'Q_{3y} + S_4'Q_{4y}$
40	$Q_{4z} =$					+5849.10^{-6}						—(24,8) : (24,4)
41	$Q_{3z} =$			+7797·10^{-6}=	+0,00311	+0,004096						
42	$Q_{2z} =$			+1885·10^{-6}=	+0,000327	+0,001558						
43	$Q_{1z} =$			+2701·10^{-6}=	+0,00086	+0,01841						
44	$\Sigma_4 =$			+0,2214	+0,7785	−0,0027			−1	Control	Diferența (−0,004)	$\Sigma_4 = -Q_{1z} + S''Q_{3z} + S''Q_{4z}$
45	$Q_{4t} =$					+11001.10^{-6}						—(24,9) : (24,4)
46	$Q_{3t} =$				+5849.10^{-6}							
47	$Q_{2t} =$			+1784·10^{-6}=	+0,00615	+0,01169						
48	$Q_{1t} =$			+2195·10^{-6}=	+0,00814	+0,1381						
49	Σ_5			+0,5840	+0,4153	−0,002			Control	−1	Diferența (−0,003)	$\Sigma_5 = -Q_{1t} + S_3''Q_{3t} + S_4''Q_{4t}$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceste valori putem calcula erorile medii pătratice ale necunoscutelor

$$\left.\begin{aligned} m_x &= \frac{\mu}{\sqrt{P_{1x}}} = \mu\sqrt{Q_{1x}} = \mu\sqrt{4\,199\cdot 10^{-6}} = \pm 0{,}065\,\mu = \pm 9{,}6 \text{ mm} \\ m_y &= \frac{\mu}{\sqrt{P_{2y}}} = \mu\sqrt{Q_{2y}} = \mu\sqrt{2\,475\cdot 10^{-6}} = \pm 0{,}050\,\mu = \pm 7{,}4 \text{ mm} \\ m_z &= \frac{\mu}{\sqrt{P_{3z}}} = \mu\sqrt{Q_{3z}} = \mu\sqrt{7\,797\cdot 10^{-6}} = \pm 0{,}088\,\mu = \pm 13{,}0 \text{ mm} \\ m_t &= \frac{\mu}{\sqrt{P_{4t}}} = \mu\sqrt{Q_{4t}} = \mu\sqrt{11\,000\cdot 10^{-6}} = \pm 0{,}150\,\mu = \pm 15{,}6 \text{ mm.} \end{aligned}\right\} \quad (179)$$

Introducînd valorile (175) în ecuaţiile (172), deducem valorile erorilor aparente

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= -0{,}00346 \text{ mm} & v_5 &= -0{,}01738 \\ v_2 &= +0{,}00360 \text{ mm} & v_6 &= -0{,}02472 \\ v_3 &= +0{,}04282 \text{ mm} & v_7 &= -0{,}01256 \\ v_4 &= +0{,}00406 \text{ mm} & v_8 &= -0{,}00034. \end{aligned}\right\} \quad (180)$$

Cu corecţiile (180), valorile măsusrate (169) devin valori corectate

$$\left.\begin{aligned} 1.\ & 189{,}40400 - 0{,}00346 = 189{,}40054 \text{ m} \\ 2.\ & 736{,}97700 + 0{,}00360 = 736{,}98060 \text{ m} \\ 3.\ & 376{,}60700 + 0{,}04282 = 376{,}64982 \text{ m} \\ 4.\ & 547{,}57600 + 0{,}00406 = 547{,}58006 \text{ m} \\ 5.\ & 273{,}52800 - 0{,}01738 = 273{,}51062 \text{ m} \\ 6.\ & 187{,}27400 - 0{,}02472 = 187{,}24928 \text{ m} \\ 7.\ & 274{,}08200 - 0{,}01256 = 274{,}06944 \text{ m} \\ 8.\ & 86{,}26100 + 0{,}00034 = 86{,}26134 \text{ m} \end{aligned}\right\} \quad (181)$$

Verificarea calculului se face observînd, de exemplu, că există anumite relaţii simple între diferenţele de nivel corectate; astfel, trebuie ca:

$$(1)+(4)=(2), \qquad (5)+(7)=(4), \qquad (7)-(8)=(3) \quad \text{etc.};$$

ceea ce se constată că, în adevăr, se verifică exact.

Rezultatul calculului este, după (171), (181) şi (179)

$$\left.\begin{aligned} x &= 736{,}98060 \pm 0{,}0096 \text{ m} \\ y &= 189{,}40054 \pm 0{,}0074 \text{ m} \\ z &= 462{,}91116 \pm 0{,}0130 \text{ m} \\ t &= 376{,}64982 \pm 0{,}0156 \text{ m.} \end{aligned}\right\} \quad (182)$$

Ca aplicaţie a formulei (147) care dă eroarea medie pătratică a unei funcţii de variabilele măsurate direct, extinsă la cazul a patru variabile

$$m_f^2 = \left\{ \frac{A_1^2}{[paa]} + \frac{(A_2\cdot 1)^2}{[pbb\cdot 1]} + \frac{(A_3\cdot 2)^2}{[pcc\cdot 2]} + \frac{(A_4\cdot 3)^2}{[pdd\cdot 3]} \right\} \mu^2, \quad (183)$$

vom considera funcţia care exprimă diferenţa de nivel dintre punctele C şi E

$$f = x - t.$$

Avem deci

$$A_1=1, \quad A_2=0, \quad A_3=0, \quad A_4=-1.$$

Din schema completă citim valorile:

$$(A_2 \cdot 1)=+0{,}45739, \quad (A_3 \cdot 2)=+32718, \quad (A_4 \cdot 3)=-0{,}80029,$$

iar din schema preliminară

$$[paa]=+352{,}0 \qquad [pbb \cdot 1]=+500{,}36$$
$$[pcc \cdot 2]=+213{,}46 \qquad [pdd \cdot 3]=+\ 90{,}985.$$

Înlocuind valorile numerice astfel calculate în expresia (183) obținem eroarea medie pătratică a funcției (184)

$$m_f^2=\left\{\frac{1}{352}+\frac{0{,}2092}{500}+\frac{0{,}1070}{213}+\frac{0{,}6405}{91}\right\}\mu^2=$$
$$=(0{,}00284+0{,}00042+0{,}00050+0{,}00705)\ \mu^2,$$

de unde

$$m_f=\pm\mu\sqrt{0{,}01081}=\pm 0{,}104\ \mu=\pm 15{,}4\ \text{mm},$$

astfel încît funcția (184) are valoarea

$$f=360{,}3308\pm 0{,}0154\ \text{m}.$$

§ 123. Eliminarea prin metoda Schreiber

Această metodă simplifică operațiile numerice de eliminare prin înlocuirea anticipată a ecuațiilor de erori date prin niște ecuații de erori fictive, dar echivalente cu primele, însă mai simple. Ne mărginim, pentru concretizare, la cazul a trei variabile și n observații, respectiv n ecuații.

Fie ecuațiile erorilor date

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z+l_1&=v_1\\ a_2x+b_2y+c_2z+l_2&=v_2\\ a_3x+b_3y+c_3z+l_3&=v_3\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ a_nx+b_ny+c_nz+l_n&=v_n. \end{aligned}\right\} \qquad (184)$$

Din aceste ecuații formăm prima ecuație normală

$$[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]=0$$

și din ea construim o nouă ecuație de erori fictivă

$$[ab]y+[ac]z+[al]=v',$$

cu ponderea $-\frac{1}{[aa]}$. Considerăm această ultimă ecuație împreună cu ecuațiile erorilor date, în care însă lăsăm la o parte termenii în variabila x; obținem sistemul

$$\left.\begin{aligned} &b_1y+c_1z+l_1=v_1 \text{ cu ponderea } 1\\ &b_2y+c_2z+l_2=v_2 \text{ cu ponderea } 1\\ &b_3y+c_3z+l_3=v_3 \text{ cu ponderea } 1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &b_ny+c_nz+l_n=v_n \text{ cu ponderea } 1\\ &[ab]y+[ac]z+[al]=v' \text{ cu ponderea } -\frac{1}{[aa]}. \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Este ușor de verificat că sistemul (185) este echivalent cu sistemul (184) în ceea ce privește necunoscutele rămase y și z. În adevăr, dacă formăm din sistemul (185) ecuațiile normale, obținem tocmai primul sistem de ecuații transformate din (184)

$$\left.\begin{aligned} &[bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z+[bl\cdot 1]=0\\ &[bc\cdot 1]y+[cc\cdot 1]z+[cl\cdot 1]=0. \end{aligned}\right\} \tag{186}$$

Procedeul este, așadar, îndreptățit; îl continuăm; din prima ecuație (186) formăm o ecuație fictivă, ca și mai sus, neglijînd termenul în y și atribuindu-i ponderea $-\frac{1}{[bb\cdot 1]}$ și apoi o asociem sistemului (185), în care suprimăm termenii în necunoscuta y; se obține astfel noul sistem

$$\left.\begin{aligned} &c_1z+l_1=v_1 \text{ cu ponderea } 1\\ &c_2z+l_2=v_2 \text{ cu ponderea } 1\\ &c_3z+l_3=v_3 \text{ cu ponderea } 1\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &[ac]z+[al]=v' \text{ cu ponderea } -\frac{1}{[aa]}\\ &[bc\cdot 1]z+[bl\cdot 1]=v'' \text{ cu ponderea } -\frac{1}{[bb\cdot 1]}. \end{aligned}\right\} \tag{187}$$

Ecuația normală dedusă din sistemul (187) este

$$[cc\cdot 2]z+[cl\cdot 2]=0, \tag{188}$$

așadar, identică cu a doua ecuație transformată din sistemul inițial de ecuații ale erorilor (184).

Putem folosi ecuaţia (188) pentru a alcătui încă odată sistemul ecuaţiilor fictive, ca şi mai sus. Ajungem, astfel, la sistemul

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= v_1 \text{ cu ponderea } 1 \\ l_2 &= v_2 \text{ cu ponderea } 1 \\ l_3 &= v_3 \text{ cu ponderea } 1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ l_n &= v_n \text{ cu ponderea } 1 \\ [al] &= v' \text{ cu ponderea } -\frac{1}{[aa]} \\ [bl\cdot 1] &= v'' \text{ cu ponderea } -\frac{1}{[bb\cdot 1]} \\ [cl\cdot 2] &= v''' \text{ cu ponderea } -\frac{1}{[cc\cdot 2].} \end{aligned}\right\} \qquad (189)$$

Dacă din aceste ecuaţii formăm suma $[vv]$, obţinem

$$[vv]=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}, \qquad (190)$$

în concordanţă cu expresia (117).

Acest rezultat ne arată că sistemele de ecuaţii fictive ale erorilor sînt echivalente cu sistemul de erori iniţiale în ceea ce priveşte calculul necunoscutelor şi al sumei $[vv]$, dar nu sînt echivalente cu privire la fiecare compensare v în parte, acestea neputînd fi calculate din sistemele (185), (187) sau (189), întrucît ele figurează în numitele sisteme ca mărimi de calcul avînd în diferitele sisteme valori diferite.

Schema lui Schreiber pentru patru necunoscute (tabela 15). În formarea rîndurilor se observă că

$$R(2)+R(3)=R(4), \qquad R(5)+R(6)+R(7)=R(8),$$
$$R(9)+R(10)+R(11)+R(12)=R(13).$$

Avantajul schemei se pune în evidenţă pentru un număr mare de necunoscute. Schema este mult aplicată în lucrările practice de geodezie, constituind o economie de muncă.

Tabela 15. **Schema lui Schreiber pentru patru necunoscute**

1	$[aa]$	$[ab]$	$[ac]$	$[ad]$	$[al]$
	2	$[bb]$	$[bc]$	$[bd]$	$[bl]$
	3	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ab]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ab]}{[aa]}[al]$
	4	$[bb\cdot 1]$	$[bc\cdot 1]$	$[bd\cdot 1]$	$[bl\cdot 1]$
		5	$[cc]$	$[cd]$	$[cl]$
		6	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ac]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ac]}{[aa]}[al]$
		7	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bd\cdot 1]$	$-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$
		8	$[cc\cdot 2]$	$[cd\cdot 2]$	$[cl\cdot 2]$
			9	$[dd]$	$[dl]$
			10	$-\frac{[ad]}{[aa]}[ad]$	$-\frac{[ad]}{[aa]}[al]$
			11	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bd\cdot 1]$	$-\frac{[bd\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bl\cdot 1]$
			12	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cd\cdot 2]$	$-\frac{[cd\cdot 2]}{[cc\cdot 2]}[cl\cdot 2]$
			13	$[dd\cdot 3]$	$[dl\cdot 3]$

§ 124. Metoda aproximațiilor succesive

Metoda aproximațiilor succesive propusă de Jacobi este convenabilă atunci cînd coeficienții pătratici de pe diagonală sînt mari în raport cu ceilalți coeficienți dreptunghiulari. Pentru a arăta în ce constă metoda, o vom aplica la un sistem de trei ecuații normale cu trei necunoscute

$$\begin{aligned}
[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]&=0\\
[ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bl]&=0\\
[ac]\,x+[bc]\,y+[cc]\,z+[cl]&=0,
\end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

care, pentru aplicarea metodei, se scriu sub forma

$$x=-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[al]}{[aa]}$$
$$y=-\frac{[ab]}{[bb]}x-\frac{[bc]}{[bb]}z-\frac{[bl]}{[bb]}$$
$$z=-\frac{[ac]}{[cc]}x-\frac{[bc]}{[cc]}z-\frac{[cl]}{[cc]}.$$

După ipoteza admisă, coeficienţii necunoscutelor din membrii ai doilea ai ecuaţiilor precedente sînt foarte mici. Putem lua, în primă aproximaţie, soluţia

$$x_1=-\frac{[al]}{[aa]},\qquad y_1=-\frac{[bl]}{[bb]},\qquad z_1=-\frac{[cl]}{[cc]}.$$

Valorile x_1, y_1, z_1 se introduc în ecuaţiile precedente şi se obţin valorile în a doua aproximaţie x_2, y_2, z_2 şi aşa mai departe. Se obţin astfel şirurile de valori

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots;\quad y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots;\quad z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots;$$

care tind spre limite bine definite, procedeul fiind cu atît mai puternic convergent cu cît coeficienţii pătratici sînt mai mari faţă de ceilalţi coeficienţi care figurează în ecuaţii — avînd în vedere că înseşi valorile x, y, z sînt suficient de mici, ele reprezentînd de fapt corecţii la valorile rotunjite ale mărimilor măsurate. În adevăr. este uşor de verificat că diferenţele x_n-x_{n-1}, y_n-y_{n-1}, z_n-z_{n-1} sînt de ordinul n în rapoartele dintre coeficienţii dreptunghiulari împărţiţi prin coeficienţii pătratici. Conform ipotezei admise, aceste diferenţe tind către zero pentru un n suficient de mare, astfel încît, de la un n suficient de mare, valorile găsite rămîn practic stabile. Punem în evidenţă metoda şi procesul de convergenţă (stabilitate) prin exemplul următor.

Exemplu numeric. Fie ecuaţiile normale

$$\begin{aligned}+12x-\ 2y+\ 3z+2{,}5&=0\\ -\ 2x+15y-\ \ z-1{,}8&=0\\ +\ 3x-\ \ y+15z+1{,}7&=0,\end{aligned}$$

pe care-l scriem sub forma

$$x=\frac{2}{12}y-\frac{3}{12}z-\frac{2{,}5}{12}$$
$$y=\frac{2}{15}x+\frac{1}{15}z+\frac{1{,}8}{15}$$
$$z=-\frac{3}{15}x+\frac{1}{15}y-\frac{1{,}7}{15}$$

Scanned with OKEN Scanner

sau pînă la a treia zecimală, presupusă suficientă ca să ne asigure justețea celei de-a doua zecimale în problema respectivă

$$x=+0{,}167y-0{,}250z-0{,}208$$
$$y=+0{,}133x+0{,}067z+0{,}120$$
$$z=-0{,}200x+0{,}067y-0{,}113.$$

Metoda descrisă mai sus ne conduce la șirurile de valori din tabela următoare.

Necunoscuta	Aproximația					
	1	2	3	4	5	6
x	−0,208	−0,160	−0,178	−0,174	−0,175	−0,175
y	+0,120	+0,085	+0,094	+0,091	+0,092	+0,095
z	−0,113	−0,063	−0,075	−0,071	−0,072	−0,072

Din tabelă se constată că șirurile obținute se stabilizează chiar după $n>5$. Avem astfel precizată a treia zecimală, ceea ce ne permite să scriem soluția rotunjită la a doua zecimală sigură

$$x=-0{,}18, \qquad y=+0{,}09, \qquad z=-0{,}07.$$

După cum se constată, procesul este rapid convergent și nu necesită calcule prea lungi.

§ 125. Metoda ecuațiilor fictive, după Cholesky [1]

Să considerăm, spre exemplificare, patru ecuații normale pentru necunoscutele x_1, x_2, x_3, x_4

$$[aa]x_1+[ab]x_2+[ac]x_3+[ad]x_4+[al]=0$$
$$[ab]x_1+[bb]x_2+[bc]x_3+[bd]x_4+[bl]=0$$
$$[ac]x_1+[bc]x_2+[cc]x_3+[cd]x_4+[cl]=0$$
$$[ad]x_1+[bd]x_2+[cd]x_3+[dd]x_4+[dl]=0.$$

În loc să se rezolve direct acest sistem prin una dintre metodele cunoscute, se înlocuiește acest sistem de ecuații normale cu un sistem fictiv de condiții ai cărui coeficienți urmează a fi calculați prin identificare. Fie, deci, sistemul de erori pentru necunoscutele

[1] Maiorul *Cholesky* a fost șeful misiunii militare franceze la Serviciul Geografic al Armatei în războiul 1916—1918. Autorul acestei lucrări a activat sub comanda maiorului Cholesky la stabilirea proiecției hărții Romîniei.

auxiliare ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, termenii liberi fiind aceeaşi ca la sistemul de ecuaţii normale dat

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\xi_1 + 0 + 0 + 0 + [al] = 0\\
&\beta_1\xi_1 + \beta_1\xi_2 + 0 + 0 + [bl] = 0\\
&\gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + 0 + [cl] = 0\\
&\delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2 + \delta_3\xi_3 + \delta_4\xi_4 + [dl] = 0.
\end{aligned}$$

Coeficienţii α, β, γ, δ se determină identificînd sistemul dat cu sistemul de ecuaţii normale dedus din sistemul fictiv. Se obţine astfel

$$\begin{aligned}
&[\alpha\alpha] = [aa], \quad [\alpha\beta] = [ab], \quad [\alpha\gamma] = [ac], \quad [\alpha\delta] = [ad],\\
&[\beta\beta] = [bb], \quad [\beta\gamma] = [bc], \quad [\beta\delta] = [bd],\\
&[\gamma\gamma] = [cc], \quad [\gamma\delta] = (cd),\\
&(\delta\delta) = (dd).
\end{aligned}$$

În formă explicită, relaţiile precedente devin, pentru sistemul de ecuaţii fictive

$$\begin{aligned}
&\alpha_1^2 = [aa], \quad \alpha_1\beta_1 = [ab], \quad \alpha_1\gamma_1 = [ac], \quad \alpha_1\delta_1 = [ad],\\
&\beta_1^2 + \beta_2^2 = [bb], \quad \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = [bc], \quad \beta_1\delta_1 + \beta_2\delta_2 = [bd],\\
&\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = [cc], \quad \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 + \gamma_3\delta_3 = [cd],\\
&\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = [dd].
\end{aligned}$$

După cum se constată, din rîndul întîi se calculează coeficienţii α_1, β_1, γ_1, δ_1; din rîndul al doilea rezultă β_2, γ_2, δ_2; din rîndul al treilea deducem γ_3, δ_3 şi, în sfîrşit, din rîndul al patrulea se obţine δ_4.

Cu aceste valori ale coeficienţilor α, β, γ, δ rezolvăm sistemul de ecuaţii fictive şi aflăm valorile necunoscutelor auxiliare $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$.

Observăm apoi că, înlocuind în prima ecuaţie normală coeficienţii necunoscutelor x_1, x_2, x_3, x_4 prin valorile lor exprimate cu ajutorul lui α, β, γ, δ se obţine

$$\alpha_1^2 x_1 + \alpha_1\beta_1 x_2 + \alpha_1\gamma_1 x_3 + \alpha_1\delta_1 x_4 = -[al],$$

sau

$$\alpha_1(\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 x_4) = -[al] = \alpha_1\xi_1,$$

Scanned with OKEN Scanner

după prima ecuație fictivă. Rezultă, în acest mod, sistemul care leagă necunoscutele auxiliare, calculate, de necunoscutele inițiale care urmează a se calcula

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 + \delta_1 x_4\\ \xi_2 &= \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 + \delta_2 x_4\\ \xi_3 &= \gamma_3 x_3 + \delta_3 x_4\\ \xi_4 &= \delta_4 x_4.\end{aligned}$$

Aflarea necunoscutelor x_1, x_2, x_3, x_4 din acest sistem este simplă. În modul acesta problema este rezolvată.

Exemplu numeric. Ecuațiile normale

$$\begin{aligned}+17{,}50x_1 - 6{,}50x_2 - 6{,}50x_3 - 2{,}14 &= 0\\ -6{,}50x_1 - 17{,}50x_2 - 6{,}50x_3 - 13{,}96 &= 0\\ -6{,}50x_1 - 6{,}50x_2 + 20{,}50x_3 + 5{,}40 &= 0.\end{aligned}$$

Ecuațiile fictive

$$\begin{aligned}\alpha_1\xi_1 + 0 + 0 - 2{,}14 &= 0\\ \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2 + 0 - 13{,}96 &= 0\\ \gamma_1\xi_1 + \gamma_2\xi_2 + \gamma_3\xi_3 + 5{,}40 &= 0.\end{aligned}$$

Coeficienții auxiliari

$$\alpha_1^2 = +17{,}50, \quad \beta_1 = -\frac{6{,}50}{4{,}18}, \quad \gamma_1 = -\frac{6{,}50}{4{,}18};$$

$$\alpha_1 = +4{,}18, \quad \beta_1 = -1{,}55, \quad \gamma_1 = -1{,}55.$$

$$\beta_2^2 = 17{,}50 - 2{,}40 = 15{,}10, \quad \gamma_2 = \frac{-6{,}50 - 2{,}40}{3{,}89} = -\frac{8{,}90}{3{,}89};$$

$$\beta_2 = +3{,}89. \quad \gamma_2 = -2{,}29,$$

$$\gamma_3^2 = 20{,}50 - 5{,}24 - 2{,}40 = +12{,}86, \quad \gamma_3 = +3{,}59.$$

Cu acești coeficienți, sistemul ecuațiilor fictive devine

$$\begin{aligned}4{,}18\,\xi_1 &= 2{,}14\\ -2{,}55\,\xi_1 + 3{,}89\,\xi_2 &= 13{,}96\\ -1{,}55\,\xi_1 - 2{,}29\,\xi_2 + 3{,}59\,\xi_3 &= 5{,}40.\end{aligned}$$

Rezolvarea lor ne dă

$$\xi_1 = +0{,}51, \quad \xi_2 = +3{,}79, \quad \xi_3 = +1{,}15.$$

Ecuațiile finale devin astfel

$$\begin{aligned}+0{,}51 &= 4{,}18\,x_1 - 1{,}55\,x_2 - 1{,}55\,x_3\\ +3{,}79 &= +3{,}89\,x_2 - 2{,}29\,x_3\\ +1{,}15 &= +3{,}59\,x_3.\end{aligned}$$

Acest sistem rezolvat dă imediat

$$x_3 = +0{,}31, \quad x_2 = 1{,}16, \quad x_1 = +0{,}67.$$

Rezolvarea sistemului inițial de ecuații normale ne dă exact aceeași soluție, ceea ce verifică justețea metodei și utilitatea ei.

Scanned with OKEN Scanner

§ 126. Rezolvarea sistemelor de ecuații normale prin metoda relaxării, după Southwell

Relaxarea este o metodă de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare prin aproximații succesive. Această metodă dă calculatorului largi posibilități de folosire a măiestriei sale matematice și a intuiției sale fizice pentru grăbirea procesului de convergență.

Să considerăm un sistem „pregătit pentru relaxare", adică un sistem în care toți coeficienții de pe diagonala principală sînt egali cu -1, iar termenii liberi sînt trecuți în primul membru în fiecare ecuație

$$\begin{aligned} -x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + \cdots + b_{1n}x_n + k_1 &= 0 \\ b_{21}x_1 - x_2 + b_{23}x_3 + \cdots + b_{2n}x_n + k_2 &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\

obicei la dreapta primei, discordanţele corespunzătoare. Cînd toate discordanţele au devenit „nule“ cu aproximaţia dorită, putem calcula valoarea x_i ca suma lui $x_i^{(0)}$ şi a tuturor variaţiilor δx_i.

Ca exemplu, să considerăm sistemul

(a)

Ecuaţia	x_1	x_2	x_3	c
I	10	−2	−2	6
II	−1	10	−2	7
III	−1	−1	10	8

care, pregătit pentru relaxare, ia forma următoare

(b)

Ecuaţia	x_1	x_2	x_3	k
I	−1	0,2	0,2	0,6
II	0,1	−1	0,2	0,7
III	0,1	0,1	−1	0,8

Alegînd ca valori iniţiale $x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$, găsim discordanţele corespunzătoare

$$R_1=0{,}60, \quad R_2=0{,}70, \quad R_3=0{,}80.$$

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
	0,60		0,70		0,80
0	0,16	0	0,16	0	−0,80
	0,76		0,86	0,80	0
	0,17	0,86	−0,86		0,09
	0,93		0		0,09
0,93	−0,93		0,09		0,09
	0		0,09		0,18
	0,04		0,04	0,18	−0,18
	0,04	0,13	0,13		0
	0,03		−0,13		0,01
	0,07		0		0,01
0,07	−0,07		0,01		0,01
	0		0,01		0,02
	0		0	0,02	−0,02
	0	0,01	0,01		0
	0		−0,01		0
1,00	0	1,00	0	1,00	0

Scanned with OKEN Scanner

Valorile inițiale ale necunoscutelor $x_i^{(0)}$ și ale discordanțelor sînt scrise în prima linie (în coloanele corespunzătoare) ale tabelei. Discordanța maximă este $R_3=0{,}80$. Pentru a o anula, facem să varieze $x_3^{(0)}$ punînd $\delta x_3=0{,}80$. Atunci R_2 se mărește cu $b_{23}\delta x_3=0{,}2\cdot 0{,}80=0{,}16$, iar R_1 cu $b_{13}\delta x_3=0{,}2\cdot 0{,}80=0{,}16$. Prin urmare, noile discordanțe sînt

$$R_1=0{,}60+0{,}16=0{,}76, \qquad R_2=0{,}70+0{,}16=0{,}86,$$
$$R_3=0{,}80-0{,}80=0.$$

Cea mai mare dintre noile discordanțe este $R_2=0{,}86$.

Mărind $x_2^{(0)}$ cu $\delta x_2=0{,}86$, anulăm această discordanță. La această etapă $\delta R_3=b_{32}\delta x_2=0{,}1\cdot 0{,}86=0{,}09$ și $\delta R_1=b_{12}\delta x_2=0{,}2\cdot 0{,}86=0{,}17$; deci $R_1=0{,}76\cdot 0{,}17=0{,}93$, $R_2=0$, $R_3=0+0{,}09=0{,}09$. Anularea celei mai mari dintre aceste discordanțe, anume R_1, se obține mărind $x_1^{(0)}$ cu $\delta x_1=0{,}93$. Această mărire conduce la următoarele variații ale discordanțelor

$$R_2=b_{21}\,\delta x_1=0{,}1\cdot 0.93=0{,}09$$
$$R_3=b_{31}\,\delta x_1=0{,}1\cdot 0{,}93=0{,}09.$$

Procesul se continuă pînă cînd toate discordanțele se anulează, cu aproximația unei unități a ultimei cifre. După aceasta, putem determina pe x_i, însumînd după coloanele corespunzătoare

$$x_1=0{,}93+0{,}07=1{,}00$$
$$x_2=0{,}86+0{,}13+0{,}01=1{,}00$$
$$x_3=0{,}80+0{,}18+0{,}02=1{,}00.$$

Rezultatul poate fi (și *trebuie să fie*) controlat, substituind valorile găsite în ecuațiile inițiale.

Practic, variațiile (δR_j) ale discordanțelor nu se scriu separat, ci schema capătă atunci forma mai compactă din următoarea tabelă (în această tabelă, pentru comoditate, toate cifrele au fost înmulțite cu 100).

x_1	R_1	x_2	R_2	x_3	R_3
0	60	0	70	0	80
	76	86	86	80	9
93	93		9	18	18
	1	13	13		1
7	7	1	1	2	2
100		100		100	

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a arăta și alte particularități ale tehnicii rezolvării prin metoda relaxării, considerăm următorul sistem (*B*), pregătit pentru relaxare.

Sistemul (*B*)

v_1	v_2	v_3	k
—1	0,3951	0	0,2695
0,3556	—1	0,3556	0,4763
0	0,3232	—1	1,0717

Acest sistem este legat de următoarea problemă de fizică: rezolvarea problemelor la limită pentru ecuații diferențiale de ordinul al doilea cu ajutorul diferențelor centrale.

În prima aproximație, coeficienții b_{ij} pot fi rotunjiți cu o cifră sau două, deoarece eroarea care se produce datorită rotunjirii dispare în decursul procesului; pentru aceasta, este suficient ca, la o anumită etapă, să calculăm discordanțele după valorile adevărate ale coeficienților. În celelalte etape, firește, trebuie să folosim aceste valori adevărate. Astfel, pentru a găsi o soluție cu aproximația de 1%, să rotunjim coeficienții sistemului (*B*) cu două cifre. Aceasta ne conduce la următorul sistem (*C*).

Sistemul (*C*)

v_1	v_2	v_3	k	B
—1	0,40	0	0,27	—0,60
0,36	—1	0,36	0,48	—0,28
0	0,32	—1	1,07	—0,68

Pornind de la aproximațiile inițiale

$$v_1^{(0)}=0{,}25,\quad v_2^{(0)}=0{,}50,\quad v_3^{(0)}=0{,}75,$$

găsim discordanțele corespunzătoare

$$R_1=0{,}25+0{,}40\cdot 0{,}50+0{,}27=0{,}22,$$
$$R_2=0{,}36\cdot 0{,}25—0{,}50+0{,}36\cdot 0{,}75+0{,}48=0{,}34,$$
$$R_3=0{,}32\cdot 0{,}50—0{,}75+1{,}07=0{,}48.$$

Sistemul (*C*) este rezolvat în tabela de mai jos. La fiecare etapă s-a anulat cea mai mare discordanță,

Scanned with OKEN Scanner

v_1	R_1	v_2	R_2	v_3	R_3
25	22	50	34	75	48
42	42	51	51	48	16
	6	15	15	21	21
9	9	8	8		3
1	1	3	3	4	4
		1	1		
77		128		148	

În această tabelă s-au obținut două cifre suplimentare pentru v_j. Pentru aceasta, au fost calculate discordanțele după valorile v_j găsite anterior și după coeficienții adevărați (B).

La calculul variațiilor discordanțelor (δR_j) au fost folosiți coeficienții rotunjiți (C). La fiecare etapă a fost făcută să dispară cea mai mare dintre discordanțe. Pentru comoditate, atît discordanțele cît și necunoscutele au fost înmulțite cu 10^4.

v_1	R_1	v_2	R_2	v_3	R_3
7 700	52	12 800	—36	14 800	53
52			—17	53	
1	1	2	2	1	1
7 753		12 802		14 854	

În toate exemplele precedente, procesul de relaxare s-a efectuat automat după regula: la fiecare etapă să se anuleze cea mai mare discordanță a etapei precedente. Totuși, adeseori este mai comod să se procedeze altfel. Astfel, la „relaxarea pe grupe" toate necunoscutele (sau un grup dintre ele) se măresc simultan cu unul și același număr δ, convenabil ales.

Aceasta duce la mărirea discordanțelor R_i cu

$$\delta R_i = \left(-1 + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\right)\delta = B_i \cdot \delta ,$$

La „relaxarea insuficientă" (sau prin exces), variațiile necunoscutelor se iau atît de mici (sau de mari), încît discordanțele să-și păstreze (să-și schimbe) semnele.

În tabela anterioară, sistemul de ecuații (B), în care

$$B_1 = -1 + 0{,}40 = -0{,}60,$$
$$B_2 = 0{,}36 - 1{,}00 + 0{,}36 = -0{,}28,$$
$$B_3 = 0{,}32 - 1 = -0{,}68,$$

Scanned with OKEN Scanner

este rezolvat de la început cu aproximația de 1% cu ajutorul variației „grupale" inițiale de +0,60 și cu aplicarea succesivă a relaxării „prin exces". Apoi, au fost scrise în tabelă discordanțele, formate după valorile adevărate ale coeficienților (B), și s-au găsit valorile finale ale necunoscutelor.

Măestria obținută prin experiență și o oarecare intuiție fizică fac să se aleagă cele mai convenabile variații ale necunoscutelor și atunci procesul de relaxare se va termina după un număr mic de etape. În procesul de relaxare nu trebuie să se tindă la micșorarea bruscă simultană a tuturor discordanțelor. Este mult mai important să se ghicească valorile convenabile δx. Începătorii se străduie de obicei să anuleze o anumită discordanță R_i și aleg corespunzător δx_i. Este adecvat să alegem rotunjit δx_i, apoi să calculăm δR_i care rezultă.

v_1	R_1	v_2	R_2	v_3	R_3	Explicații
25	22	50	34	75	48	$v_j^{(0)}$ și $R_i^{(0)}$ conform (C)
60	−14	60	17	60	7	Variația grupală $\delta = 60$
−7	−8	20	−3	15	13	Relaxare prin exces
	1		2	−2	−2	
78		130	−1	148		Soluție cu aproximație de 1%
7 800	31	13 000	−200	14 800	119	Discordanțele conform (B)
−49	−49	−200	20	55	55	Relaxare simplă
1	1	2	2	1	1	
7 752	1	12 802	0	14 856	−1	Soluție cu aproximație de 0,01% și controlul discordanțelor
1				−1		
7 753		12 802		14 855		Soluția finală a sistemului

§ 127. Apariția și evaluarea numărului de ecuații de condiție într-o problemă de triangulație

În orice problemă de triangulație avem de-a face cu lanțuri sau cu rețele de triunghiuri sau chiar de poligoane care trebuie compensate. Este evident că între unghiurile măsurate, precum și între unghiurile și laturile măsurate, există anumite relații geometrice impuse prin construcție. Este util, pentru problema de compensare astfel pusă, să se evalueze anticipat numărul acestor relații și carac-

Scanned with OKEN Scanner

terul lor, bine înțeles, fiind necesar a se păstra numai relațiile *independente*.

Să presupunem, așadar, că avem o rețea de triunghiuri care trebuie compensată, rețelele de poligoane fiind reductibile la rețele de triunghiuri. Ne întrebăm mai întîi: care este numărul ecuațiilor de condiție independente care se pot stabili între unghiuri, respectiv între unghiuri și laturi? Pentru simplificarea problemei, presupunem că avem o rețea de triunghiuri în care este măsurată o singură dreaptă de bază. Rețeaua este definită prin următoarele caracteristici

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Numărul vîrfurilor} & p \\ \text{Numărul laturilor de legătură} & l \\ \text{Numărul laturilor de legătură măsurate numai într-un sens} & l' \\ \text{Numărul laturilor de legătură măsurate în ambele sensuri} & l-l' \\ \text{Numărul măsurătorilor de unghiuri} & U \\ \text{Numărul măsurătorilor de direcții} & D \end{array}\right\} \quad (191)$$

Tratăm mai întîi măsurătorile de unghiuri și apoi măsurătorile de direcții, care trebue executate în fiecare stație complet.

Este util să insistăm că este vorba de aflarea acelor relații de condiție care sînt independente între ele. De asemenea, trebuie să se facă distincția între măsurătorile necesare determinării rețelei și măsurătorile supranumerare.

Măsurătorile de unghiuri. Este evident că numărul ecuațiilor de condiție independente este egal cu numărul observațiilor sau măsurătorilor supranumerare, adică al măsurătorilor peste numărul celor necesare pentru determinarea algebrică a necunoscutelor, deoarece orice măsurătoare supranumerară procură o probă de măsurare de sine stătătoare. Notăm:

$$r = \text{numărul ecuațiilor de condiție independente.} \quad (192)$$

În ceea ce privește numărul de unghiuri necesare, observăm că, în cazul considerat al unei singure baze, două dintre punctele relației sînt fixe și anume, extremitățile bazei; ele nu mai necesită, pentru determinarea lor, măsurători de unghiuri. Orice alt punct necesită măsurarea a două unghiuri pentru a fi legate de bază, astfel încît

$$p-2 \text{ puncte} \left\{\begin{array}{ll} \text{o bază cu două puncte fixe necesită} & 0 \text{ unghiuri,} \\ \text{al treilea punct necesită} & 2 \text{ unghiuri,} \\ \text{al patrulea punct necesită} & 2 \text{ unghiuri,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \text{al } p\text{-lea punct necesită} & 2 \text{ unghiuri.} \end{array}\right.$$

Scanned with OKEN Scanner

În total, avem $0+2(p-2)=2p-4$ unghiuri necesare. Prin urmare, dacă într-o rețea se măsoară U unghiuri, vom avea $U-(2p-4)$ măsurători supranumerare, astfel încît numărul ecuațiilor de condiție este

$$r=U-2p+4. \tag{193}$$

Aceste ecuații de condiție se împart în două categorii: *unghiulare*, în care figurează numai unghiuri, și *laterale*, în care figurează atît unghiuri cît și laturi.

Ecuațiile unghiulare se împart, la rîndul lor, în două tipuri distincte: *triunghiulare*, respectiv *poligonale*, și *de stație*.

Printre primele figurează suma unghiurilor unui triunghi plan sau sferic, respectiv suma unghiurilor unui poligon cu n laturi

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=(n-2)\,180^\circ.$$

În căutarea acestor relații de condiție, trebuie remarcat că observațiile într-o singură direcție nu procură astfel de relații; de exemplu, dacă într-un triunghi se măsoară numai două unghiuri, nu este cazul să se formeze proba sumei.

Trebuie observat, de asemenea, că numărul ecuațiilor de condiție triunghiulare nu este egal cu numărul triunghiurilor din rețea, căci, în acest caz, unele dintre ecuații pot fi conținute în altele.

Este evident că ecuațiile poligonale se reduc la cele triunghiulare, căci putem descompune oricînd un poligon în triunghiuri. Fie, deci, un contur poligonal determinat de p puncte; el va conține p laturi.

Dacă avem în total l drepte, rămîn $l-p$ drepte neatinse de contur, fiecare dintre ele procurînd o relație de condiție. Prin urmare, un contur poligonal cu p laturi ne dă o relație, iar cele $l-p$ laturi arbitrare ne dau $l-p$ ecuații.

În total, un contur poligonal cu p laturi, dintre care sînt măsurate l laturi, dă

$$1+l-p \text{ ecuații de condiție poligonale,} \tag{194}$$

admițînd că cele l laturi (194) au fost măsurate dus și întors; dacă l' dintre ele au fost măsurate numai într-un sens, avem

$$1+(l-l')-p \text{ ecuații de condiție poligonale.} \tag{195}$$

Punctele de intersecție numai într-un sens nu trebuie ținute în seamă.

Pentru determinarea numărului de ecuații laterale într-o rețea triunghiulară este necesar să facem distincția între o „rețea" și un

Scanned with OKEN Scanner

„lanț“ de triunghiuri. Numim „lanț de triunghiuri“ o succesiune de triunghiuri în care putem trece de la un triunghi la altul numai pe un singur drum; într-o „rețea de triunghiuri“ putem trece de la un triunghi la altul pe mai multe drumuri diferite. Astfel, un patrulater cu o singură diagonală este un lanț, pe cînd un patrulater cu două diagonale este o rețea.

Dacă într-un lanț se măsoară un nou unghi prin care lanțul se transformă în rețea, ia naștere o nouă relație de condiție. Orice latură care nu este necesară pentru formarea lanțului ne dă o relație de condiție. Se poate stabili regula

„Numărul ecuațiilor laterale într-o rețea de triunghiuri este egal cu numărul laturilor care pot fi suprimate pentru a se transforma rețeaua într-un lanț“.

Pentru a exprima aceste considerații printr-o formulă, observăm că, pentru formarea unui triunghi inițial — adică a primelor trei laturi — sînt necesare trei puncte și că pentru fiecare punct nou sînt necesare două laturi. Așadar

$p-3$ puncte:

pentru primele trei puncte sînt necesare	3 drepte
pentru al patrulea punct sînt necesare	2 drepte
pentru al cincilea punct sînt necesare	2 drepte
. . . . .	. . . . .
pentru al p-lea punct sînt necesare	2 drepte

În total, $3+2(p-3)=2p-3$ drepte.

Dacă avem l drepte, sînt $l-(2p-3)$ măsurători supranumerare, astfel încît, în aceste condiții avem

$$l-2p+3 \text{ ecuații de condiție laterale.} \qquad (196)$$

Exemplu. În patrulaterul $ABCD$ sînt măsurate cele cinci unghiuri indicate pe fig. 14. După formula (196), unde $l=6$ (avem șase laturi) și $p=4$ (avem patru vîrfuri), rezultă $6-8+3=1$ ecuații de condiție laterale. Cu toate că nici unul dintre cele patru triunghiuri din figură nu se închide la 180°, avem pentru patrulater, după cele de mai sus, totuși o probă laterală, pe care o deducem observînd că putem exprima latura CD în două moduri

$$CD=AB\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin\alpha_5}\,,$$

$$CD=AB\frac{\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}\cdot\frac{\sin\alpha_4}{\sin(\alpha_4+\alpha_5)}\,.$$

Egalînd aceste două expresii, obținem relația de condiție laterală

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\sin(\alpha_4+\alpha_5)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\sin\alpha_2\sin\alpha_5}=1\,. \qquad (197)$$

Dacă această condiție nu este satisfăcută, atunci cu cele cinci unghiuri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ nu putem construi patrulaterul fără nepotrivire, ci se va obține într-un punct al construcției un triunghi afectat de o eroare de închidere.

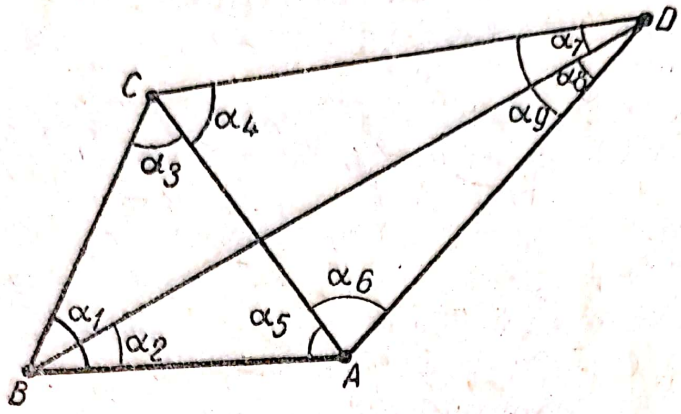


Fig. 14

În ceea ce privește numărul de ecuații de condiție de stație, observăm că într-o stație cu s raze sînt necesare $s-1$ unghiuri pentru fixarea acestor raze. Dacă sînt n unghiuri măsurate, atunci în această stație avem

$$n-s+1 \text{ ecuații de condiție laterale.} \qquad (198)$$

Să scădem din relația (193) expresiile (196) și (194), respectiv (195).

Avem, dacă toate laturile sînt măsurate în ambele sensuri,

$$U-2l+p \text{ ecuații de stație.} \qquad (199)$$

Dacă dintre cele l laturi avem l' măsurate numai într-un sens și din cele p puncte avem p' întretăiate fie numai la dus fie numai la întors, găsim

$$U+p-p'-2l+l' \text{ ecuații de stație.} \qquad (199')$$

În rezumat, în cazul măsurătorilor *de unghiuri*, avem următoarele numere de ecuații de condiție independente.

U măsurători de unghiuri; p puncte, l drepte; toate observate dus și întors:

$$\left.\begin{array}{l} l-2p+3 \text{ ecuații de condiție laterale} \\ l-p+1 \text{ ecuații de condiție triunghiulare sau poligonale} \\ U-2l+p \text{ ecuații de condiție de stație} \\ r=U-2p+4 \text{ ecuații de condiție, în total.} \end{array}\right\} \qquad (200)$$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă dintre cele l drepte avem un număr de l' măsurate numai într-un sens şi dintre cele p puncte avem p' întretăiate numai dus sau numai întors, găsim

$$\left.\begin{array}{l} l-2p+3 \text{ ecuaţii de condiţie laterale} \\ l-l'-(p-p')+1 \text{ ecuaţii de condiţie triunghiulare sau poligonale} \\ U+p-p'-2l+l' \text{ ecuaţii de condiţie de staţie} \\ r=U-2p+4 \text{ ecuaţii de condiţie, în total.} \end{array}\right\} \quad (201)$$

Măsurătorile de direcţii constituie o completare a măsurătorilor de unghiuri, care sînt măsurători fundamentale în practica geodezică. Totuşi, în unele chestiuni de practică trigonometrică, măsurătorile de direcţii joacă un rol important. Observăm însă că o măsurătoare de direcţie se reduce de fapt la două măsurători de unghiuri, ceea ce face să conchidem că măsurătorile de direcţii ne vor da atîtea relaţii de condiţie cîte se pot deduce din măsurătorile respective de unghiuri, ţinîndu-se seama însă că în cazul reţelelor complete dispar relaţiile de staţie.

Să presupunem că avem o staţie cu U măsurători de unghiuri şi cu D măsurători de direcţii. Avem evident relaţia

$$D=U+1,$$

care ne spune că în fiecare staţie avem o direcţie mai mult decît unghiuri independente, iar într-o reţea completă cu p puncte şi U unghiuri avem

$$U=D-p.$$

neglijîndu-se punctele de întretăiere *numai înainte*.

În rezumat, fie D direcţii, p puncte, l laturi măsurate înainte şi înapoi. Avem ecuaţiile de condiţie independente

$$\left.\begin{array}{l} l-2p+3 \text{ ecuaţii laterale} \\ l-p+1 \text{ ecuaţii triunghiulare sau poligonale} \\ \left.\begin{array}{l} r=2l-3p+4 \\ r=D-3p+4 \end{array}\right\} \text{ ecuaţii de condiţie, în total.} \end{array}\right\} \quad (202)$$

Relaţia $D=2l$ rezultă din faptul că, deoarece fiecare latură este măsurată înainte şi înapoi, vom avea un număr de direcţii de două ori mai mare decît al laturilor.

Scanned with OKEN Scanner

Dacă dintre cele l laturi avem l' laturi măsurate numai într-un sens, iar dintre cele p puncte avem p' puncte obținute din întretăiere înainte sau înapoi, exclusiv, numărul relațiilor de condiție este

$$\left.\begin{array}{l} l=2p+3 \text{ ecuații laterale} \\ l-l'-(p-p')+1 \text{ ecuații triunghiulare sau poligonale} \\ r=2l-l'-3p+p'+4 \text{ ecuații de condiție, în total.} \end{array}\right\} \quad (203)$$

Aceste considerații specifice problemei triunghiulației cu condiția închiderii pe orizont în stație și a închiderii rețelei complete ne arată necesitatea rezolvării problemei compensării măsurătorilor condiționate, prin metoda celor mai mici pătrate, indiferent dacă aceste măsurători privesc determinarea unor necunoscute în mod direct sau în mod indirect.

§ 128. Determinări condiționate, cu egală precizie, reduse la determinări indirecte

Să considerăm n mărimi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pentru determinarea cărora s-au efectuat observații sau măsurători *directe*, găsindu-se rezultatele $l_1, l_2, \ldots, l_n$, cu *egală precizie*.

Presupunem că cele n necunoscute $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt obligate să satisfacă *riguros* r relații de condiție, *independente* între ele, astfel ca numărul necunoscutelor să fie mai mare decît numărul relațiilor de condiție

$$n > r. \quad (204)$$

Fie deci *relațiile de condiție*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n+a_0=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\cdots+b_nx_n+b_0=0 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots+c_nx_n+c_0=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3+\cdots+r_nx_n}_{n \text{ necunoscute}}+r_0=0 \end{array}\right\} \quad (205)$$

(r ecuații)

Este de așteptat că valorile experimentale $l_1, l_2, \ldots, l_n$ nu vor satisface riguros ecuațiile (205), astfel încît înlocuind în (205)

necunoscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin $l_1, l_2, \ldots, l_n$ vom obține rezultate diferite de zero

$$\left.\begin{aligned} &a_1l_1+a_2l_2+a_3l_3+\cdots+a_nl_n+a_0=w_a\\ &b_1l_1+b_2l_2+b_3l_3+\cdots+b_nl_n+b_0=w_b\\ &c_1l_1+c_2l_2+c_3l_3+\cdots+c_nl_n+c_0=w_c\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_1l_1+r_2l_2+r_3l_3+\cdots+r_nl_n+r_0=w_r. \end{aligned}\right\} \quad (206)$$

Mărimile $w_a, w_b, w_c, \cdots, w_r$ astfel obținute ne arată nepotrivirea dintre valorile adevărate (necunoscute) și cele determinate prin observație și poartă numele de *discordanțe* sau *nepotriviri*. Semnul acestor mărimi se determină observînd că

Discordanța w = valoarea observată — valoarea teoretică. (207)

Problema revine, deci, la a găsi care trebuie să fie corecțiile $v_1, v_2, \ldots, v_n$ care, aplicate valorilor măsurate $l_1, l_2, \ldots, l_n$, să facă să dispară discordanțele, astfel încît să avem

$$\left.\begin{aligned} &a_1(l_1+v_1)+a_2(l_2+v_2)+a_3(l_3+v_3)+\cdots+a_n(l_n+v_n)+a_0=0\\ &b_1(l_1+v_1)+b_2(l_2+v_2)+b_3(l_3+v_3)+\cdots+b_n(l_n+v_n)+b_0=0\\ &c_1(l_1+v_1)+c_2(l_2+v_2)+c_3(l_3+v_3)+\cdots+c_n(l_n+v_n)+c_0=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_1(l_1+v_1)+r_2(l_2+v_2)+r_3(l_3+v_3)+\cdots+r_n(l_n+v_n)+r_0=0, \end{aligned}\right\} \quad (208)$$

relații care, ținînd seama de egalitățile (206), se scriu

$$\left.\begin{aligned} &a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n+w_a=0\\ &b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\cdots+b_nv_n+w_b=0\\ &c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n+w_c=0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\cdots+r_nv_n+w_r=0, \end{aligned}\right\} \quad (209)$$

ceea ce se mai poate scrie

$$[av]=-w_a, \quad [bv]=-w_b, \quad [cv]=-w_c, \quad \cdots, \quad [rv]=-w_r. \quad (210)$$

Aceste ecuații se numesc *ecuații de corecție condiționale*.

Numărul corecțiilor, adică al necunoscutelor, fiind mai mare decît numărul ecuațiilor [relația (204)], rezultă că problema nu admite o soluție unică dacă este privită ca o simplă problemă de algebră.

Scanned with OKEN Scanner

De aceea, în lumina principiului de minim pus în metoda celor mai mici pătrate, se adaugă pentru determinarea valorilor necunoscutelor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ şi cunoscuta condiţie de compensare

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+v_3^2+\cdots+v_n^2=\text{minimă}. \qquad (211)$$

Reducerea problemei determinărilor condiţionate, aşa cum a fost pusă mai sus, la problema determinărilor indirecte, fără ecuaţii suplimentare de condiţie, se face rezolvînd sistemul (209) în raport cu r oarecare dintre necunoscute, în funcţie de celelalte $n-r$ necunoscute rămase. Se obţine astfel sistemul

$$\left.\begin{aligned} v_1&=A_1v_{r+1}+B_1v_{r+2}+\cdots+H_1v_n\\ v_2&=A_2v_{r+1}+B_2v_{r+2}+\cdots+H_2v_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ v_r&=A_rv_{r+1}+B_rv_{r+2}+\cdots+H_rv_n, \end{aligned}\right\} \qquad (212)$$

la care, adăugînd şi ecuaţiile care exprimă cele $n-r$ necunoscute rămase, sub forma

$$\left.\begin{aligned} v_{r+1}&=v_{r+1}\\ v_{r+2}&=\cdots v_{r+2}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ v_n&=\cdots\cdots v_n, \end{aligned}\right\} \qquad (213)$$

obţinem un sistem (212)+(213) de $n-r+r=n$ ecuaţii de erori, cu $n-r$ necunoscute independente; acest sistem poate fi tratat după metoda obişnuită expusă în paragrafele precedente.

Uneori această metodă este mai comodă, după cum vom constata în exemplul practic tratat mai departe.

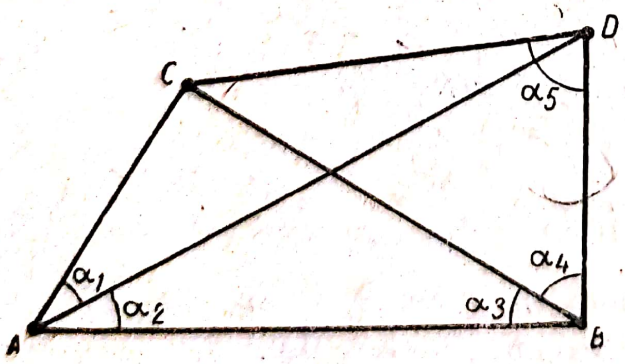


Fig. 15

Aplicaţie practică în geodezie. Compensarea unei reţele de triangulaţie, determinată prin măsurarea unghiurilor şi a unei baze geodezice. Fie baza

$$AB=4\,962{,}8282\text{ m}, \qquad (214)$$

a cărei eroare de măsurare este neglijabilă faţă de erorile celorlalte măsurători efectuate (fig. 15). Unghiurile măsurate sînt indicate pe figură. Ponderile corespunzătoare p au fost apreciate în virtutea principiului de repetiţie (numărul măsurătorilor individuale).

Scanned with OKEN Scanner

S-au determinat astfel următoarele valori pentru unghiurile indicate pe figură

	Unghiul α_i	Ponderea p	$1/p$	$\sqrt{p}$
1	81°21'43,36"	70	0,0143	8,37
2	31°37'39,73"	7	0,1429	2,65
3	25°16'28,85"	101	0,0099	10,05
4	76°33'44,65"	47	0,0213	6,86
5	73°21'46,35"	85	0,0118	9,22
6	67° 4'27,96"	57	0,0175	7,55
7	28°25'42,53"	10	0,1000	3,16
8	7°56' 6,92"	28	0,0357	5,29
9	36°21'49,55"	30	0,0333	5,48

Numărul relațiilor de condiție se stabilește după considerațiile dezvoltate în (§ 127). După formulele (199), în care ținem seama că în problema noastră

numărul de unghiuri măsurate este $U=9$
numărul de puncte ale figurii este $p=4$
numărul de laturi ale figurii este $l=6$,

rezultă adică

$U-2p+4=5$ relații de condiție,

$l-2p+1=1$ relație laterală
$l-p+3=3$ relații unghiulare,

iar în stația D, unde avem măsurate trei unghiuri și avem trei direcții, după formula (196) vom obține o relație de închidere pe orizont (de stație); așadar, în total, avem cinci relații de condiție.

Ecuația laterală se formează pentru punctul A pe care-l considerăm punct central. Scriind în două moduri expresia laturii AD cu ajutorul laturii AB, obținem relația de condiție laterală căutată

$$\frac{\sin\alpha_1 \sin\alpha_4 \sin\alpha_8}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_9 \sin\alpha_2}=1\,. \tag{215}$$

Închiderile celor trei unghiuri ne dau cele trei relații triunghiulare

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5-(180°+\varepsilon_2)&=0 \text{ din } \Delta ABC,\\ \alpha_4+\alpha_3+\alpha_9-(180°+\varepsilon_3)&=0 \text{ din } \Delta ACD,\\ \alpha_2+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_8-(180°+\varepsilon_4)&=0 \text{ din } \Delta ABD,\end{aligned} \tag{216}$$

unde ε_2, ε_3, ε_4 sînt excesele sferice ale triunghiurilor indicate.

Ecuația în stație, de închidere la orizont, ne dă în D

$$\alpha_7+\alpha_8-\alpha_9=0\,, \tag{217}$$

În problema de triangulație practică, pe care o expunem ca exemplu, s-au calculat excesele sferice luîndu-se valoarea bazei după formula (214) și unghiurile măsurate după tabela de mai sus, ținîndu-se seamă de latitudinea geografică a punctului A (care era de 49°30'). S-a găsit

$$\varepsilon_2 = 0{,}139'' , \quad \varepsilon_3 = 0{,}505'' , \quad \varepsilon_4 = 0{,}151'' .$$

Facem controlul unghiurilor pentru triunghiurile indicate în relațiile (216) și (217) spre a calcula discordanțele. Obținem astfel următoarele valori

	$\alpha_1 = 81°21'43{,}36''$ $\alpha_3 = 25°16'28{,}85''$ $\alpha_5 = 73°21'46{,}35''$	$\alpha_4 = 76°33'44{,}65''$ $\alpha_6 = 67°\ 4'27{,}96''$ $\alpha_9 = 36°21'49{,}55''$	$\alpha_2 = 31°37'39{,}73''$ $\alpha_5 = 73°21'46{,}35''$ $\alpha_6 = 67°\ 4'27{,}96''$ $\alpha_8 = 7°56'\ 6{,}92''$
Suma:	179°59'58,560"	180°0'2,160"	180°0'0,960"
Teoretic:	180° 0' 0,138"	180°0'0,505"	180°0'0,151"
Discordanța	$w_2 = -1{,}578$	$w_3 = +1{,}655$	$w_4 = +0{,}809$

Pentru stabilirea relației de condiție laterală trebuie adusă relația (215) la forma liniară, ceea ce obținem prin aplicarea logaritmilor. Avem, din (215), relația liniară (teoretică, ceea ce este indicat prin indicele superior)

$$\lg \sin \alpha_1^t + \lg \sin \alpha_4^t + \lg \sin \alpha_8^t - \lg \sin \alpha_3^t - \lg \sin \alpha_9^t - \lg \sin \alpha_2^t = 0 ,$$

relație care, evident, nu poate fi satisfăcută riguros cu valorile din tabela de la pag. 295. Introducînd aceste valori în relația precedentă, vom obține valoarea discordanței corespunzătoare

$$\lg \sin \alpha_1 + \lg \sin \alpha_4 + \lg \sin \alpha_8 - \lg \sin \alpha_3 - \lg \sin \alpha_9 - \lg \sin \alpha_2 = w_1 .$$

Pentru a face să dispară discordanța w_1 trebuie, după procedeul obișnuit expus mai sus, să aplicăm corecțiile respective v_i astfel încît să avem

$$\lg \sin (\alpha_1 + v_1) + \lg \sin (\alpha_4 + v_4) + \lg \sin (\alpha_8 + v_8) - \\ - \lg \sin (\alpha_3 + v_3) - \lg \sin (\alpha_9 + v_9) - \lg \sin (\alpha_2 - v_2) = 0. \qquad (218)$$

Dar, cum aceste corecții v_i trebuie presupuse suficient de mici față de valorile α_i, ne putem opri în dezvoltarea în serie Taylor a logaritmului la al doilea termen; anume

$$\lg \sin (\alpha_i + v_i) = \lg \sin \alpha_i + M \operatorname{ctg} \alpha_i \frac{v_i}{206\,265} , \qquad (219)$$

unde $M = \lg e = 0{,}43429$ este modulul de transformare a logaritmilor, iar numitorul 206 565 este adăugat pentru a putea exprima pe v_i în secunde. Calculul ne dă

$$\frac{M}{206\,265} = 21{,}055 \text{ unități de-al șaptelea ordin zecimal în logaritm;}$$

$$\lg \frac{M}{206\,265} = 1{,}32336 , \qquad (220)$$

Cu această valoare putem calcula coeficientul fiecărui v_i din expresia (219); astfel, pentru $i=1$ avem

$$\lg \operatorname{ctg} 81°21'43{,}36'' = \bar{1}{,}18160,$$

deci coeficientul lui v_1 în expresia (220) este

$$\frac{M}{206\,265} \operatorname{ctg} 81°21'43{,}36'' = +3{,}199 \approx +3{,}200.$$

Calculînd în mod analog ceilalți coeficienți, găsim ecuația laterală căutată. în unități de a șasea cifră zecimală în logaritmi, anume

$$+0{,}320v_1 + 0{,}503v_4 + 15{,}105v_8 - 4{,}459v_3 - 2{,}860v_9 - 3{,}419v_2 + 4{,}715 = 0, \quad (221)$$

valoarea lui w_1 fiind dată de termenul care se obține în (219) prin înlocuirea valorilor α_i din tabela de la pag. 295.

Ecuațiile triunghiulare se scriu imediat, după tabela de la pag. 296; avem

$$\left.\begin{aligned} v_2 + v_5 + v_6 + v_8 + 0{,}809'' &= 0 \\ v_1 + v_3 + v_5 \quad + 1{,}578'' &= 0 \\ v_4 + v_6 + v_9 \quad + 1{,}655'' &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (222)$$

Ecuația în stație — adică a turului de orizont — este

$$v_7 + v_8 - v_9 - 0{,}100'' = 0. \quad (223)$$

Sistemul format din ecuațiile (221), (222) și (223) constituie sistemul ecuațiilor de condiție pentru corecțiile $v_1, v_2, \ldots, v_9$. Reducerea problemei la o problemă de compensare indirectă se face alegînd dintre cele nouă unghiuri măsurate numai *patru* ca variabile independente, anume $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ și α_8, care fixează complet pozițiile celor patru puncte. Rezolvarea sistemului obținut în funcție de aceste patru variabile ne dă ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} v_5 &= -v_1 - v_3 + 1{,}578 \\ v_6 &= +v_1 - v_2 + v_3 - v_8 - 2{,}387 \\ v_9 &= -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 4{,}641\,v_8 + 1{,}511 \\ v_4 &= -0{,}946\,v_1 + 1{,}867\,v_2 + 0{,}475\,v_3 - 3{,}641\,v_8 - 0{,}779 \\ v_7 &= -0{,}054\,v_1 - 0{,}867\,v_2 - 1{,}475\,v_3 + 3{,}641\,v_8 - 1{,}611, \end{aligned}\right\} \quad (224)$$

la care se adaugă ecuațiile erorilor pentru variabilele independente

$$v_1 = v_1, \quad v_2 = v_2, \quad v_3 = v_3, \quad v_8 = v_8. \quad (225)$$

Scanned with OKEN Scanner

Ponderile sînt date în tabela de la pag. 295. Pentru uşurarea calculului, este convenabil să se ia ponderile de 100 ori mai mici. Ecuaţiile (224) şi (225) precum şi ponderile respective ne dau sistemul de ecuaţii ale erorilor

	p	$\sqrt{p}$
$v_1 = +1{,}00\ v_1$	0,70	0,837
$v_2 = +1{,}000 v_2$	0,07	0,265
$v_3 = +1{,}000 v_3$	1,01	1,005
$v_8 = +1{,}000 v_8$	0,28	0,529
$v_5 = -1{,}000 v_1 - 1{,}000 v_3 + 1{,}578$	0,85	0,922
$v_6 = +1{,}000 v_1 - 1{,}000 v_2 + 1{,}000 v_3 - 1{,}000 v_8 - 2{,}387$	0,57	0,755
$v_4 = -0{,}946 v_1 + 1{,}867 v_2 + 0{,}475 v_3 - 3{,}641 v_8 - 0{,}779$	0,47	0,686
$v_7 = -0{,}054 v_1 - 0{,}867 v_2 - 1{,}475 v_3 + 3{,}641 v_8 + 1{,}611$	0,10	0,316
$v_9 = -0{,}054 v_1 - 0{,}867 v_2 - 1{,}475 v_3 + 4{,}641 v_8 + 1{,}511$	0,30	0,548

(226)

După metoda dezvoltată în § 118, putem introduce ponderile direct în necunoscute, astfel încît valorile se calculează dintr-odată. Avem deci, după § 118, de înmulţit ecuaţiile (226) respectiv prin $\sqrt{p_i}$; obţinem *ecuaţiile erorilor ponderate*

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{p_1}\, v_1 &= +0{,}84\, v_1 \\
\sqrt{p_2}\, v_2 &= +0{,}26\, v_2 \\
\sqrt{p_3}\, v_3 &= +1{,}00\, v_3 \\
\sqrt{p_8}\, v_8 &= +0{,}53\, v_8 \\
\sqrt{p_5}\, v_5 &= -0{,}92\, v_1 - 0{,}92\, v_3 + 1{,}46 \\
\sqrt{p_6}\, v_6 &= +0{,}75\, v_1 - 0{,}75 v_2 + 0{,}75\, v_3 - 0{,}75\, v_8 - 1{,}80 \\
\sqrt{p_4}\, v_4 &= -0{,}65\, v_1 + 1{,}28\, v_2 + 0{,}33\, v_3 - 2{,}49\, v_8 - 0{,}53 \\
\sqrt{p_7}\, v_7 &= -0{,}02\, v_1 - 0{,}27\, v_2 + 0{,}46\, v_3 + 1{,}15\, v_8 + 0{,}51 \\
\sqrt{p_9}\, v_9 &= -0{,}03\, v_1 - 0{,}48\, v_2 - 0{,}81\, v_3 + 2{,}55\, v_8 + 0{,}83\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

Valorile coeficienţilor au fost rotunjite pînă la 0,01 ceea ce este suficient pentru a ne da o precizie în valorile unghiurilor de 0,01".

Din sistemul de erori (227) putem deduce, în mod obişnuit, ecuaţiile normale corespunzătoare pe care le scriem prescurtat (§ 110)

$$\left.\begin{aligned}
+\underline{2{,}54}\, v_1 - 1{,}37\, v_2 + 1{,}23\, v_3 + 0{,}96\, v_8 - 2{,}38 &= 0 \\
+\underline{2{,}57}\, v_2 + 0{,}37\, v_3 - 4{,}16\, v_8 + 0{,}14 &= 0 \\
+\underline{3{,}39}\, v_3 - 3{,}98\, v_8 - 3{,}77 &= 0 \\
+\underline{14{,}87}\, v_8 + 5{,}37 &= 0 \\
+\underline{6{,}60}\,. &
\end{aligned}\right\} \qquad (228)$$

Rezolvarea acestor ecuații normale ne duce la soluțiile

$$v_1 = +0{,}64'' , \quad v_2 = -0{,}41'' , \quad v_3 = +0{,}46'' , \quad v_8 = -0{,}50'' . \tag{229}$$

Înlocuirea acestor valori în sistemul (226) ne dă și celelalte necunoscute, Ne rezervăm operația de rezolvare a problemei și ca aplicație a metodei corelatelor; în cele ce preced am intenționat să ilustrăm printr-un exemplu concret metoda reducerii problemei compensărilor condiționate la compensările indirecte, ceea ce ne-a condus la ecuațiile erorilor ((226), respectiv (227), și la ecuațiile normale (228).

§ 129. Compensarea necunoscutelor determinate direct, cu egală precizie, dar supuse la ecuații de condiție, prin metoda corelatelor

Metoda corelatelor pornește de la ideea tratării problemei ca o problemă variațională, de extremum, și anume avem să facem minimă funcția $[vv]$ sub condiția să fie satisfăcute „ecuațiile de legătură" (209). O astfel de problemă se tratează în calculul variațional luînd în locul funcției date (211) o funcție compusă cu ajutorul ecuațiilor de condiție, cu folosirea coeficienților nedeterminați. Să înmulțim ecuațiile (209) succesiv prin

$$-2K_a, \quad -2K_b, \quad -2K_c, \quad \cdots, \quad -2K_r$$

și să le adunăm cu funcția (211); obținem funcția

$$\left.\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2, \cdots, v_n) = {} & v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \cdots + v_n^2 - \\ & -2K_a(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \cdots + a_nv_n + w_a) - \\ & -2K_b(b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 + \cdots + b_nv_n + w_b) - \\ & -2K_c(c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + \cdots + c_nv_n + w_c) - \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & -2K_r(r_1v_1 + r_2v_2 + r_3v_3 + \cdots + r_nv_n + w_r) . \end{aligned}\right\} \tag{230}$$

În loc de a pune condiția de minim al funcției (211), se pune condiția de minim al funcției (230). Prin urmare, trebuie să scriem condiția ca derivatele parțiale ale funcției $\varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ în raport cu aceste necunoscute să fie nule. Aceste ecuații ne vor determina valorile necunoscutelor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dacă se pot calcula valorile mărimilor $K_a, K_b, K_c, \cdots, K_r$ introduse ca noi parametri necunoscuți. Aceasta este posibil întrucît ecuațiile care exprimă mărimile $v_1, v_2, \ldots, v_n$ în funcție de mărimile $K_a, K_b,$

Scanned with OKEN Scanner

$K_c, \cdots, K_r$ se prezintă sub forma unor ecuaţii de erori. În adevăr, derivînd parţial funcţia (230), obţinem

$$\begin{aligned}
\varphi'_{v_1} &= 2v_1 - 2K_a a_1 - 2K_b b_1 - 2K_c c_1 - \cdots - 2K_r r_1 = 0 \\
\varphi'_{v_2} &= 2v_2 - 2K_a a_2 - 2K_b b_2 - 2K_c c_2 - \cdots - 2K_r r_2 = 0 \\
\varphi'_{v_3} &= 2v_3 - 2K_a a_3 - 2K_b b_3 - 2K_c c_3 - \cdots - 2K_r r_3 = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi'_{v_n} &= 2v_n - 2K_a a_n - 2K_b b_n - 2K_n c_n - \cdots - 2K_r r_n = 0,
\end{aligned}$$

de unde rezultă valorile corecţiilor celor mai probabile exprimate prin corelate

$$\left.\begin{aligned}
v_1 &= a_1 K_a + b_1 K_b + c_1 K_c + \cdots + r_1 K_r \\
v_2 &= a_2 K_a + b_2 K_b + c_2 K_c + \cdots + r_2 K_r \\
v_3 &= a_3 K_a + b_3 K_b + c_3 K_c + \cdots + r_3 K_r \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
v_n &= a_n K_a + b_n K_b + c_n K_c + \cdots + r_n K_r.
\end{aligned}\right\} \qquad (231)$$

Mărimile $K_a, K_b, K_c, \cdots, K_r$, introduse drept coeficienţi nedeterminaţi în problema variaţională, apar acum în ecuaţiile de erori (231) ca necunoscute noi; ele poartă numele de *corelate*. Cunoaşterea lor rezolvă problema propusă.

Pentru a stabili ecuaţiile care permit determinarea valorilor corelatelor, înlocuim expresiile (231) ale variabilelor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ în ecuaţiile (209); ordonînd expresiile astfel găsite, obţinem un sistem de r ecuaţii pentru cele r necunoscute.

Acest procedeu nu este altceva decît procedeul stabilirii ecuaţiilor normale pentru ecuaţiile de erori (231). Se deduc astfel ecuaţiile normale ale corelatelor

$$\left.\begin{aligned}
[aa]K_a + [ab]K_b + [ac]K_c + \cdots + [ar]K_r + w_a &= 0 \\
[aa]K_a + [bb]K_b + [bc]K_c + \cdots + [br]K_r + w_b &= 0 \\
[ac]K_a + [bc]K_b + [cc]K_c + \cdots + [cr]K_r + w_c &= 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
[ar]K_a + [br]K_b + [cr]K_c + \cdots + [rr]K_r + w_r &= 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (232)$$

S-a obţinut astfel un sistem de tot atîtea ecuaţii cîte necunoscute sînt şi anume cîte corelate sînt, deci cîte ecuaţii de condiţie avem în problema considerată. Sistemul (232) are exact aspectul ecuaţiilor normale ale unui sistem de ecuaţii de erori pentru măsurători indirecte; numai termenii liberi sînt construiţi în alt mod.

Scanned with OKEN Scanner

Evident că ecuaţiile (232) se pot rezolva prin metodele de rezolvare a ecuaţiilor normale studiate în paragrafele anterioare.

Mersul calculului. După ce s-au determinat coeficienţii $a, b, c, \ldots, r$ şi termenii liberi $w_a, w_b, w_c, \cdots, w_r$ din ecuaţiile de condiţie (209), se calculează în mod obişnuit coeficienţii $[ab]$, $[ac]$ etc. ai ecuaţiilor normale (232). Aceste ecuaţii, rezolvate printr-una din metodele cunoscute, ne dau valorile corelatelor $K_a, K_b, K_c, \cdots, K_r$. Înlocuind aceste valori în expresiile (231) se deduc valorile corecţiilor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ care, aplicate valorilor măsurate $l_1, l_2, \ldots, l_n$, ne dau valorile compensate ale necunoscutelor, problema fiind astfel rezolvată.

Exemplu numeric. Măsurînd unghiurile unui triunghi plan s-a găsit

$$\alpha_1 = 43°15'17'', \quad \alpha_2 = 78°43'50'', \quad \alpha_3 = 58°01'05'';$$

trebuie să găsim valorile compensate x_1, x_2, x_3 ale acestor unghiuri. Aceste valori trebuie să satisfacă singura relaţie de condiţie

$$x_1 + x_2 + x_3 - 180° = 0.$$

Ecuaţiile corelaţiilor (209) se reduc la

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 180° = w_a = +12''.$$

Avînd o singură ecuaţie de condiţie, vom avea o singură corelată K ce urmează a fi dedusă dintr-o singură ecuaţie normală.

Ecuaţiile corecţiilor (209) se reduc la

$$v_1 + v_2 + v_3 + 12'' = 0.$$

Ecuaţiile (231) devin

$$v_1 = a_1 K = K, \quad v_2 = a_2 K = K, \quad v_3 = a_3 K = K,$$

deoarece $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

Ecuaţiile (232) se reduc la

$$3K + 12'' = 0, \quad K = -4'', \quad \text{căci} \quad [aa] = 3.$$

Rezultă deci $v_1 = v_2 = v_3 = -4''$, astfel încît valorile compensate sînt

$$x_1 = 43°15'13'', \quad x_2 = 78°43'46'', \quad x_3 = 58°01'01''.$$

§ 130. Compensarea necunoscutelor determinate direct, cu precizii diferite, supuse la ecuaţii de condiţie

Admitem că pentru determinarea necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s-au făcut măsurători directe, dar de precizii diferite, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$, găsindu-se valorile $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Admitem că necu-

Scanned with OKEN Scanner

noscutele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ trebuie să satisfacă ecuaţiile de condiţie în număr de $r \leq n$

$$\left.\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n+a_0=0 \\ b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\cdots+b_nx_n+b_0=0 \\ c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+\cdots+c_nx_n+c_0=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3+\cdots+r_nx_n+r_0=0, \end{aligned}\right\} \qquad (233)$$

aceleaşi relaţii (205) ca şi în cazul măsurătorilor de egală precizie. Se obţin, deci, aceleaşi ecuaţii de corecţie condiţionale (209)

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n+w_a=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\cdots+b_nv_n+w_b=0 \\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n+w_c=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\cdots+r_nv_n+w_r=0. \end{aligned}\right\} \qquad (234)$$

În cazul de faţă, al determinărilor ponderate, valorile cele mai probabile sînt acele valori care satisfac condiţia de a face minimă suma

$$[pvv]=\text{minimă},$$

o dată cu satisfacerea relaţiilor de legătură (234). Ca şi în cazul precedent, metoda variaţională cu ajutorul coeficienţilor nedeterminaţi conduce la minimul funcţiei

$$\begin{aligned} \varphi(v_1, v_2, \ldots, v_n)=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2- \\ -2K_a(a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_a)- \\ -2K_b(b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_b)- \\ -2K_c(c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n+w_c)- \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -2K_r(r_1v_1+r_2v_2+\cdots+r_nv_n+w_r). \end{aligned}$$

Egalînd cu zero derivatele parţiale în raport cu necunoscutele $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ca şi în cazul precedent, găsim relaţiile

$$\begin{aligned} \varphi'_{v_1}=2p_1v_1-2a_1K_a-2b_1K_b-2c_1K_c-\cdots-2r_1K_r=0 \\ \varphi'_{v_2}=2p_2v_2-2a_2K_a-2b_2K_b-2c_2K_c-\cdots-2r_2K_r=0 \\ \varphi'_{v_3}=2p_3v_3-2a_3K_a-2b_3K_b-2c_3K_c-\cdots-2r_3K_r=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi'_{v_n}=2p_nv_n-2a_nK_a-2b_nK_b-2c_nK_c-\cdots-2r_nK_r=0, \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde deducem valorile corecţiilor cele mai probabile, exprimate prin corelate

$$\left.\begin{aligned} v_1&=\frac{1}{p_1}(a_1K_a+b_1K_b+c_1K_c+\ldots+r_1K_r)\\ v_2&=\frac{1}{p_2}(a_2K_a+b_2K_b+c_2K_c+\ldots+r_2K_r)\\ v_3&=\frac{1}{p_3}(a_3K_a+b_3K_b+c_3K_c+\ldots+r_3K_r)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ v_n&=\frac{1}{p_n}(a_nK_a+b_nK_b+c_nK_c+\ldots+r_nK_r). \end{aligned}\right\} \quad (235)$$

Cu ajutorul acestor ecuaţii transformăm, ca şi în cazul precedent, ecuaţiile (234) şi obţinem ecuaţiile normale ale corelatelor

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]K_a+\left[\frac{ab}{p}\right]K_b+\left[\frac{ac}{p}\right]K_c+\ldots+\left[\frac{ar}{p}\right]K_r+w_a&=0\\ \left[\frac{ab}{p}\right]K_a+\left[\frac{bb}{p}\right]K_b+\left[\frac{bc}{p}\right]K_c+\ldots+\left[\frac{br}{p}\right]K_r+w_b&=0\\ \left[\frac{ac}{p}\right]K_a+\left[\frac{bc}{p}\right]K_b+\left[\frac{cc}{p}\right]K_c+\ldots+\left[\frac{cr}{p}\right]K_r+w_c&=0\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \left[\frac{ar}{p}\right]K_a+\left[\frac{br}{p}\right]K_b+\left[\frac{cr}{p}\right]K_c+\ldots+\left[\frac{rr}{p}\right]K_r+w_r&=0. \end{aligned}\right\} \quad (236)$$

Aceste ecuaţii diferă de ecuaţiile (232) prin apariţia parametrului de pondere p, dar diferă şi de ecuaţiile normale obişnuite (125), unde parametrul de pondere p apare la numărător.

Aplicaţie practică la exemplul tratat în § 128. Să considerăm ecuaţiile de condiţie stabilite (221), (222) şi (223) şi să formăm direct ecuaţiile normale ale corelatelor (236). Rezolvarea lor ne dă valorile corelatelor care, introduse în relaţiile (235), ne dau valorile corecţiilor. Pentru simplificarea calculului, formăm tabela coeficienţlor ecuaţiilor de condiţie, scriind şi ponderile respective, după prima tabelă din § 128.

		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	w
	p	70	7	101	47	85	57	10	28	30	
	$1/p$	0,0143	0,1429	0,0099	0,0213	0,0118	0,0175	0,1000	0,0357	0,0333	
1	a	+0,320	−3,419	−4,459	+0,503				+15,105	2,860	+4,715
2	b		+1			+1	+1		+1		+0,809
3	c	+1		+1		+1					−1,578
4	d				+1		+1			+1	+1,655
5	e							+1	+1	−1	−0,100

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile normale ale corelatelor se formează din această tabelă, calculînd coeficienții $\left[\frac{aa}{p}\right]$, $\left[\frac{ab}{p}\right]$ etc. Se obțin următoarele cinci ecuații normale ale corelatelor, corespunzătoare ecuațiilor (236)

$$\left.\begin{aligned}
+10{,}2941\,K_1+0{,}0511\,K_2-0{,}0396\,K_3-0{,}0846\,K_4+0{,}6348\,K_5+4{,}7150&=0\\
+0{,}2079\,K_2+0{,}0118\,K_3+0{,}00175\,K_4+0{,}0357\,K_5+0{,}8090&=0\\
+0{,}0360\,K_3+0\cdot K_4+0\cdot K_5-1{,}5780&=0\\
+0{,}0721\,K_4+0{,}0333\,K_5+1{,}6050&=0\\
+0{,}1690\,K_5-0{,}1000&=0.
\end{aligned}\right\}\quad(237)$$

Observăm în primul rînd, că metoda corelatelor, în exemplul de față, ne conduce la rezolvarea a cinci ecuații normale (237), pe cînd metoda mai înainte expusă, a reducerii la determinări indirecte, ne-a condus la rezolvarea numai a patru ecuații normale (228). Soluțiile ecuațiilor (237) sînt

$$K_1=-0{,}3436,\quad K_2=-4{,}0814;\quad K_3=+44{,}7898;\quad K_4=-23{,}2072,\quad K_5=-1{,}8229,$$

valori care, introduse în relațiile (235) formate după tabela precedentă, ne dau corecțiile

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=+\frac{320}{70}K_1+\frac{1}{70}K_3=+0{,}638''\\
v_2&=-\frac{3{,}419}{7}K_1+\frac{1}{7}K_2=-0{,}415''\\
v_3&=-\frac{4{,}459}{101}K_1+\frac{1}{101}K_3=+0{,}459''\\
v_4&=+\frac{0{,}503}{47}K_1+\frac{1}{47}K_4=-0{,}497''\\
v_5&=\frac{1}{85}K_2+\frac{1}{85}K_3=+0{,}497''\\
v_6&=\frac{1}{57}K_2+\frac{1}{57}K_4=-0{,}479''\\
v_7&=\frac{1}{10}K_7=-0{,}183''\\
v_8&=\frac{+15{,}105}{28}K_1+\frac{1}{28}K_2+\frac{1}{28}K_5=-0{,}396''\\
v_9&=\frac{-2{,}860}{30}K_1+\frac{1}{30}K_4-\frac{1}{30}K_5=-0{,}680'';
\end{aligned}\right\}\quad(238)$$

valorile coincid cu valorile (229) prin rotunjire la a doua cifră zecimală.

§ 131. Calculul sumei pătratelor erorilor aparente [vv]

Să aplicăm formula (109), § 116, care ne dă eroarea medie pătratică individuală m, în cazul unor măsurători de egală precizie, și formula corespunzătoare (128), în cazul determinărilor ponderate, la problema compensării determinărilor condiționate.

Pentru aceasta, avem de considerat sistemul de erori (212)+(213), de $r+(n-r)$ ecuaţii cu $n-r$ necunoscute, căci, dacă am cunoaşte valorile mărimilor (213), celelalte mărimi ar fi determinate prin ecuaţiile (212). Aşadar, sîntem în cazul aplicării formulelor lui Bessel generalizate (109), respectiv (128); avem în cazul măsurătorilor cu egală precizie

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{\{r+(n-r)\}-(n-r)}}=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r}} \tag{239}$$

şi, corespunzător, pentru eroarea medie pătratică a unităţii de pondere,

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}}\,, \tag{240}$$

în cazul măsurătorilor ponderate. Reamintim că r este numărul ecuaţiilor de condiţie date.

Totul revine deci la calculul sumei $[vv]$, respectiv $[pvv]$. În acest scop, ridicăm la pătrat expresiile (231) şi le adunăm. Obţinem

$$\left.\begin{aligned}[vv]=[aa]K_aK_a+2[ab]K_aK_b+2[ac]K_aK_c+\cdots+2[ar]K_aK_r+\\ +[bb]K_bK_b+2[bc]K_bK_c+\cdots+2[br]K_bK_r+\\ +[cc]K_cK_c+\cdots+2[cr]K_cK_r+\\ \cdots\quad\cdots\cdots\cdots\\ +[rr]K_rK_r,\end{aligned}\right\} \tag{241}$$

de unde, avînd în vedere ecuaţiile normale (232), deducem

$$[vv]=-K_aw_a-K_bw_b-K_cw_c-\cdots-K_rw_r=-[wK]. \tag{242}$$

În adevăr, este suficient să înmulţim ecuaţiile (232) respectiv cu $K_a, K_b, K_c, \cdots, K_r$ şi să le adunăm, pentru a obţine membrul al doilea al egalităţii (241); astfel, rezultă direct formula (242), aplicată curent în practica geodezică.

Spre a concretiza ideile, să considerăm formula (241) pentru cazul a trei variabile. Aplicînd identitatea (118), putem scrie

$$[vv]=\frac{1}{[aa]}\{[aa]K_a+[ab]K_b+[ac]K_c\}^2+$$

$$+\frac{1}{[bb\cdot 1]}\{[bb\cdot 1]K_b+[bc\cdot 1]K_c\}^2+\frac{1}{[cc\cdot 2]}\{[cc\cdot 2]K_c\}^2$$

Scanned with OKEN Scanner

sau, înlocuind valorile lui w_a, w_b, w_c din (232), rezultă

$$[vv]=\frac{w_a^2}{[aa]}+\frac{(w_b\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(w_c\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}, \tag{243}$$

unde simbolurile $(w_b\cdot 1)$ şi $(w_c\cdot 2)$ se formează după regulile exprimate prin formulele (145), § 119.

În cazul mărimilor ponderate, după (235), vom avea în loc de (242)

$$[pvv]=-[wK] \tag{244}$$

şi, în loc de (243),

$$[pvv]=\frac{w_a^2}{[aa]}+\frac{(w_b\cdot 1)^2}{[bb\cdot 1]}+\frac{(w_c\cdot 2)^2}{[cc\cdot 2]}. \tag{245}$$

§ 132. Ponderea unei funcţii de valori compensate ale necunoscutelor în compensarea condiţionată

După ce am introdus, în § 129, noţiunea de „corelate", sîntem în măsură să dăm o expresie convenabilă în calculele practice pentru ponderea unei funcţii de valorile compensate ale mărimilor măsurate, completînd prin aceasta consideraţiile de la § 119.

Fie, aşadar,

$$f=A_0+A_1(l_1+v_1)+A_2(l_2+v_2)+A_3(l_3+v_3)+\cdots+A_n(l_n+v_n) \tag{246}$$

o funcţie liniară de valorile compensate l_1+v_1, l_2+v_2, . . ., l_n+v_n ale mărimilor măsurate, A_0, A_1, A_2, . . ., A_n fiind coeficienţi constanţi. Evident, nu este necesar să figureze toţi l_i+v_i în expresia (246). Se cere să determinăm ponderea unei astfel de funcţii utilizînd exprimarea prin corelate.

Admiţînd că am determinat valorile corecţiilor v_1, v_2, . . ., v_n după rezolvarea problemei de compensare, vom obţine pentru aceste mărimi nişte expresii care sînt funcţii de valorile măsurate l_1, l_2, . . ., l_n, astfel încît, în definitiv, funcţia (246) se poate scrie sub forma

$$f=f_0+f_1l_1+f_2l_2+f_3l_3+\cdots+f_nl_n, \tag{247}$$

căreia putem să-i aplicăm teorema erorilor. Admiţînd, pentru moment, că toate ponderile sînt egale cu unitatea şi notînd cu P ponderea funcţiei, avem

$$\frac{1}{P}=\frac{f_1^2}{1}+\frac{f_2^2}{1}+\frac{f_3^2}{1}+\cdots+\frac{f_n^2}{1}=[ff]. \tag{248}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a exprima coeficienţii f_l în funcţie de A_l şi coeficienţii $a, b, c, \ldots$ care figurează în ecuaţiile iniţiale, folosim ecuaţiile (231).

Pentru a fixa ideile, dezvoltăm calculul pentru trei ecuaţii de condiţie, deci trei corelate şi patru necunoscute. Avem, după (231),

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1K_a + b_1K_b + c_1K_c \\ v_2 &= a_2K_a + b_2K_b + c_2K_c \\ v_3 &= a_3K_a + b_3K_b + c_3K_c \\ v_4 &= a_4K_a + b_4K_b + c_4K_c. \end{aligned}\right\} \qquad (249)$$

Substituind aceste valori în (246), obţinem funcţia (247) sub forma

$$f = A_0 + [lA] + [aA]K_a + [bA]K_b + [cA]K_c. \qquad (250)$$

Pentru a obţine o funcţie de tipul (247), rămîne să eliminăm din expresia (250) corelatele. În acest scop, folosim ecuaţiile normale ale corelatelor (232), pe care le scriem sub forma

$$\left.\begin{aligned} [aa]K_a + [ab]K_b + [ac]K_c + [al] + a_0 &= 0 \\ [ab]K_a + [bb]K_b + [bc]K_c + [bl] + b_0 &= 0 \\ [ac]K_a + [bc]K_b + [cc]K_c + [cl] + c_0 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (251)$$

Să înmulţim în ecuaţiile precedente, succesiv, prin q_1, q_2, q_3 şi să adunăm rezultatele. Parametrii necunoscuţi astfel introduşi se determină anulînd coeficienţii termenilor în K_a, K_b, K_c ; se obţin astfel aşa-numitele *ecuaţii de tranziţie*

$$\left.\begin{aligned} [aa]q_a + [ab]q_b + [ac]q_c + [aA] &= 0 \\ [ab]q_a + [bb]q_b + [bc]q_c + [bA] &= 0 \\ [ac]q_a + [bc]q_b + [cc]q_c + [cA] &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (252)$$

Rezolvarea acestui sistem de ecuaţii ne dă pe q_1, q_2, q_3. Ţinînd seama de relaţiile (251) şi (252), expresia (250) se poate scrie

$$f = A_0 + [lA] + \{a_0 + [al]\}q_a + \{b_0 + [bl]\}q_b + \{c_0 + [cl]\}q_c \qquad (253)$$

sau, ordonînd după l, cum cere expresia (247), găsim

$$\begin{aligned} f = {} & A_0 + a_0q_a + b_0q_b + c_0q_c + \\ & + \{A_1 + a_1q_a + b_1q_b + c_1q_c\}l_1 + \{A_2 + a_2q_a + b_2q_b + c_2q_c\}l_2 + \\ & + \{A_3 + a_3q_a + b_3q_b + c_3q_c\}l_3 + \{A_4 + a_4q_a + b_4q_b + c_4q_c\}l_4. \end{aligned} \qquad (254)$$

De aici rezultă că coeficienţii din expresia (247) sînt

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= A_1 + a_1 q_a + b_1 q_b + c_1 q_c \\ f_2 &= A_2 + a_2 q_a + b_2 q_b + c_2 q_c \\ f_3 &= A_3 + a_3 q_a + b_3 q_b + c_3 q_c \\ f_4 &= A_4 + a_4 q_a + b_4 q_b + c_4 q_c \,. \end{aligned}\right\} \qquad (255)$$

Înlocuind aceste expresii în relaţia (248), obţinem ponderea P a funcţiei f, dată prin relaţia

$$\frac{1}{P} = [ff] = [AA] - \left\{ \frac{[aA]^2}{[aa]} + \frac{[bA \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} + \frac{[cA \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} \right\}, \qquad (256)$$

de unde, după formulele obişnuite, rezultă

$$[bA \cdot 1] = [bA] - \frac{[ab]\,[aA]}{[aa]}$$

$$[cA \cdot 1] = [cA] - \frac{[ac]\,[aA]}{[aa]}$$

$$[cA \cdot 2] = [cA \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]\,[bA \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} \,.$$

Relaţia (256) ne arată clar cum creşte ponderea P prin apariţia observaţiilor suplimentare. În adevăr, termenul $[AA]$ fiind inversul ponderii funcţiei de valorile *necompensate*, toate observaţiile suplimentare contribuie la formarea parantezei $\{ \cdot \cdot \cdot \}$ din formula (256), termen care, fiind esenţial pozitiv, scade valoarea lui $\frac{1}{P}$, deci creşte valoarea ponderii P.

Dacă avem însă de-a face cu măsurători de precizii inegale, ponderile nu mai sînt egale cu 1, aşa cum s-a admis mai sus, iar în locul expresiilor precedente găsim, după regula cunoscută de propagare a erorilor,

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{ff}{p}\right] = \left[\frac{AA}{p}\right] - \left\{ \frac{\left[\frac{aA}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]} + \frac{\left[\frac{bA}{p} \cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p} \cdot 1\right]} + \frac{\left[\frac{cA}{p} \cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p} \cdot 2\right]} \right\}. \qquad (257)$$

Aspectul relaţiilor (256) şi (257) sugerează formularea unei reguli de alcătuire a acestor formule şi anume: adăugăm la sistemul ecuaţiilor de condiţie (209) o nouă ecuaţie fictivă, alcătuită cu ajutorul coeficienţilor $A_1, A_2, \ldots, A_n$, şi tratăm apoi întreg sistemul astfel obţinut drept un sistem efectiv de ecuaţii ale erorilor. Rezolvarea

lui prin metoda Gauss ne conduce, în adevăr, la expresii echivalente cu (256), respectiv (257).

În adevăr, fie sistemul (209), cu ecuația fictivă suplimentară

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+w_a&=0\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+b_4v_4+w_b&=0\\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+w_c&=0\\ A_1v_1+A_2v_2+A_3v_3+A_4v_4+w_A&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (258)$$

Ecuațiile normale ale corelatelor, pentru acest sistem, sînt

$$\begin{aligned} \underline{[aa]}K_a+[ab]K_b+[ac]K_c+[aA]&=0\\ \underline{[bb]}K_b+[bc]K_c+[bA]&=0\\ \underline{[cc]}K_c+[cA]&=0\\ \underline{[AA]},& \end{aligned}$$

iar după prima eliminare

$$\begin{aligned} \underline{[bb\cdot 1]}K_b+[bc\cdot 1]K_c+[bA\cdot 1]&=0\\ \underline{[cc\cdot 1]}K_c+[cA\cdot 1]&=0\\ \underline{[AA\cdot 1]};& \end{aligned}$$

astfel încît, după o nouă eliminare,

$$\begin{aligned} \underline{[cc\cdot 2]}K_c+[cA\cdot 2]&=0\\ \underline{[AA\cdot 2]}.& \end{aligned}$$

În sfîrșit, după o ultimă eliminare ne rămîne termenul liber final care, după considerațiile de la § 116, formula (116), rezultă că este egal cu

$$[AA\cdot 3]=[ff]=\frac{1}{P}, \qquad (259)$$

formulă care coincide cu (256).

Această regulă ușurează calculul practic al ponderii P.

Putem da funcției f, considerată ca funcție de variabilele compensate, o expresie care o pune în legătură cu expresia aceleiași funcții considerată ca funcție de variabilele necompensate și pe care o însemnăm cu (f). În adevăr, din (253) și (254) rezultă că avem

$$f=(A_0+A_1l_1+A_2l_2+A_3l_3+A_4l_4+w_aq_a+w_bq_b+w_cq_c;$$

așadar, cu notația specificată, avem

$$f=(f)+[wq]. \qquad (260)$$

Scanned with OKEN Scanner

Prin urmare, dacă (f) este valoarea funcţiei înainte de compensare, valoarea ei după compensare, f, se află adăugînd termenii $[wq]$, care ar fi nuli dacă nu ar exista discordanţele w dintre datele deduse prin măsurători şi valorile aşteptate teoretic.

Aplicaţie practică. Reluăm, spre completare, problema propusă şi tratată în §§ 127 şi 129, pentru a deduce eroarea medie pătratică a unităţii de pondere (240) şi eroarea medie pătratică a rezultatului determinării indirecte a uneia dintre distanţele care alcătuiesc reţeaua din datele măsurătorilor directe. De exemplu, distanţa AD se obţine din baza AB prin relaţia

$$\overline{AD} = \overline{AB}\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_8}. \qquad (261)$$

Să calculăm, mai întîi, eroarea medie pătratică a unităţii de pondere după formula (240). În acest scop, calculăm suma $[pvv]$ şi pentru control suma $[wK]$, după formula (244).

Întocmind apoi tabela comparativă, cu datele din formula (238).

	v	v^2	p	pvv		w	K	$-wK$
1	+0,638	0,4070	70	28,49	1	+4,715	— 0,3436	+ 1,62
2	—0,415	0,1722	7	1,21				
3	+0,459	0,2107	101	21,28	2	+0,809	— 4,0814	+ 3,30
4	—0,497	0,2470	47	11,61				
5	+0,479	0,2294	85	19,50	3	—1,578	+44,7898	+70,68
6	—0,479	0,2294	57	13,08				
7	—0,183	0,0335	10	0,34	4	+1,655	—23,2072	+38,41
8	—0,396	0,1568	28	4,39				
9	—0,680	0,4624	30	13,87	5	—0,100	— 1,8279	— 0,18
		$[p]=$	435					
				$[pvv]=113,77$			$-[wK]=113,83$	

Prin urmare avem, cu o concordanţă satisfăcătoare, după formula (244),

$$[pvv] = -[wK] = 113,8.$$

Eroarea medie pătratică a unităţii de pondere este, după (240),

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{113,8}{5}} = \pm 4,77'', \qquad (262)$$

Pentru determinarea erorii medii pătratice a măsurătorii laturii AD, să logaritmăm formula (261); avem funcția

$$f = \lg \sin \alpha_2 - \lg \sin \alpha_8, \tag{263}$$

lăsînd la o parte constanta lg $\overline{AB}$, care nu este afectată de eroare.

Pentru calculul coeficienților A_2 și A_8, aplicăm formula (219) cu valorile (220)

$$\lg \frac{M}{206\,265} = 0{,}32336 \text{ pentru unități de al șaselea ordin zecimal în logaritm.}$$

Avem

$$\lg \operatorname{ctg} 31°37'39{,}73'' = 0{,}21056$$
$$\lg \operatorname{ctg}\ 7°56'\ 6{,}92'' = 0{,}85577.$$

Se obține

$$f_2 = \frac{M}{206\,265} \operatorname{ctg} 31°37'39{,}73'' = +3{,}419$$

$$f_8 = -\frac{M}{206\,265} \operatorname{ctg}\ 7°56'6{,}92'' = -15{,}105\,.$$

Ceilalți coeficienți sînt nuli:

$$A_1 = A_3 = A_4 = A_5 = A_7 = A_9 = 0\,.$$

Cu datele din tabela de mai sus și cu valorile precedente ale coeficienților, calculăm sumele necesare pentru a aplica regula de eliminare stabilită anterior. Astfel găsim

$$\left[\frac{aA}{p}\right] = \frac{a_1A_1}{p_1} + \frac{a_2A_2}{p_2} + \frac{a_3A_3}{p_3} + \frac{a_4A_4}{p_4} + \frac{a_5A_5}{p_5} + \frac{a_6A_6}{p_6} + \frac{a_7A_7}{p_7} + \frac{a_8A_8}{p_8} + \frac{a_9A_9}{p_9} =$$
$$= 0 - 3{,}419 \times 0{,}1429 \times 3{,}419 + 0 + 0 + 0 + 0 - 15{,}105 \times 0{,}0357 \times 15{,}105 + 0 = -9{,}82\,.$$

În mod analog se găsește

$$\left[\frac{bA}{p}\right] = -0{,}05,\ \left[\frac{cA}{p}\right] = 0{,}00,\ \left[\frac{dA}{p}\right] = 0{,}00,\ \left[\frac{eA}{p}\right] = -0{,}54,\ \left[\frac{AA}{p}\right] = +9{,}82\,.$$

Punînd, după regula anunțată, aceste valori în locul termenilor liberi din ecuațiile (237) și procedînd la eliminarea succesivă, după procedeul obișnuit, obținem inversul ponderii egal cu ultimul termen al eliminării, după cum am specificat mai sus

$$\frac{1}{P} = \left[\frac{AA}{p} \cdot 5\right] = 0{,}31\,. \tag{264}$$

Eroarea medie pătratică M a funcției (263) este, deci, ținînd seamă de valoarea (262) a erorii medii pătratice a unității de pondere,

$$M = \mu \sqrt{\frac{1}{P}} = \pm 4{,}77 \cdot \sqrt{0{,}31} = \pm 2{,}66, \tag{265}$$

exprimată în unități de al șaselea ordin zecimal în logaritmi.

Scanned with OKEN Scanner

După (263), aceasta înseamnă că variația expresiei

$$s=\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_8}$$

este dată de relația

$$\Delta \lg s=\frac{0{,}43429}{s}\,\Delta s=\pm 0{,}00000266\,,$$

unde 0,43429 este modulul de transformare al logaritmilor. Dar am presupus că baza $\overline{AB}$=4 962,8282 m este fără eroare.
Rezultă, din formula (261) că

$$\Delta \lg (\overline{AD})=\Delta \lg s\,,$$

astfel încît putem scrie

$$\pm \frac{0{,}00000266}{0{,}43429}=\frac{\Delta (\overline{AD})}{\overline{AD}}\,. \qquad (266)$$

Lungimea laturii $\overline{AD}$ calculată din formula (261) ne dă

$$\overline{AD}=18\,851{,}510 \text{ m};$$

rezultă, așadar, din (266) că eroarea acestei valori este

$$\Delta (\overline{AD})=0{,}115 \text{ m}\,.$$

Putem scrie, în definitiv, valoarea lungimii laturii considerate

$$\overline{AD}=18\,851{,}510 \text{ m}\pm 0{,}115 \text{ m}\,, \qquad (267)$$

corecția constituind eroarea de triangulație.
Dacă însă ținem seama că și valoarea considerată mai sus pentru baza $\overline{AB}$ este afectată de eroare, aceasta se transmite prin formula (261). Măsurătorile geodezice de precizie au condus la convingerea că eroarea medie pătratică a valorii considerate pentru baza $\overline{AB}$ este de ± 9,7 mm. Această eroare, transmisă prin formula (261), ne dă ca eroare asupra lui $\overline{AD}$

$$\pm \frac{18\,852}{4\,963}\cdot 9{,}7=\pm 46{,}8 \text{ mm}\,,$$

astfel încît, după regula compunerii erorilor medii pătratice, găsim ca eroare rezultantă

$$\sqrt{(36{,}8)^2+(115)^2}=\pm 124 \text{ mm}\,.$$

În definitiv, în loc de rezultatul (267), trebuie să scriem

$$\overline{AD}=18\,815{,}510 \text{ m}\pm 0{,}124 \text{ m}\,.$$

§ 133. Reducerea ecuațiilor de condiție neliniare la forma liniară

După cum am văzut chiar în exemplul anterior, se pot întîlni relații de condiție care nu au formă liniară în necunoscute. În exemplul anterior am redus expresia care ne dă ecuația de con-

diție la forma liniară prin aplicarea logaritmilor. În general, însă, putem efectua această operație prin dezvoltarea în serie Taylor, după cum vom arăta mai departe.

Presupunem deci că ecuațiile de condiție sînt date sub forma neliniară

$$\left.\begin{aligned} f_a(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0\\ f_b(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0\\ f_c(x_1, x_2, \ldots, x_n)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{268}$$

mărginindu-ne la trei funcții pentru a fixa ideile.

Este de așteptat că, înlocuind în (268) valorile exacte ale necunoscutelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin valorile obținute din măsurători $l_1, l_2, \ldots, l_n$, vom obține discordanțele dintre experiență și teorie.

Astfel,

$$\left.\begin{aligned} f_a(l_1, l_2, \ldots, l_n)&=w_a\\ f_b(l_1, l_2, \ldots, l_n)&=w_b\\ f_c(l_1, l_2, \ldots, l_n)&=w_c. \end{aligned}\right\} \tag{269}$$

Dacă înlocuim în expresiile (268) valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ prin valorile compensate

$$x_1=l_1+v_1,\ x_2=l_2+v_2,\ \cdots,\ x_n=l_n+v_n,$$

unde admitem că corecțiile $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sînt foarte mici — ceea ce rezidă în însăși natura acestor mărimi — atunci putem dezvolta funcțiile astfel obținute în serie Taylor și ne putem opri la termenul de ordinul întîi în dezvoltare, adică la termenul liniar în $v_1, v_2, \ldots, v_n$; obținem astfel din (268)

$$\left.\begin{aligned} f_a(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots, l_n+v_n)&=f_a(l_1, l_2, \cdots, l_n)+\\ &+\frac{\partial f_a}{\partial l_1}v_1+\frac{\partial f_a}{\partial l_2}v_2+\cdots+\frac{\partial f_a}{\partial l_n}v_n=0,\\ f_b(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots, l_n+v_n)&=f_b(l_1, l_2, \cdots, l_n)+\\ &+\frac{\partial f_b}{\partial l_1}v_1+\frac{\partial f_b}{\partial l_2}v_2+\cdots+\frac{\partial f_b}{\partial l_n}v_n=0,\\ f_c(l_1+v_1, l_2+v_2, \cdots, l_n+v_n)&=f_c(l_1, l_2, \cdots, l_n)+\\ &+\frac{\partial f_c}{\partial l_1}v_1+\frac{\partial f_c}{\partial l_2}v_2+\cdots+\frac{\partial f_c}{\partial l_n}v_n=0. \end{aligned}\right\} \tag{271}$$

Notînd

$$\frac{\partial f_a}{\partial l_i}=a_i,\quad \frac{\partial f_b}{\partial l_i}=b_i,\quad \frac{\partial f_c}{\partial l_i}=c_i, \tag{272}$$

Scanned with OKEN Scanner

mărimi care sînt niște constante, și ținînd seamă de relațiile (269), egalitățile (271) pot fi scrise sub forma

$$\left.\begin{aligned} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n+w_a&=0\\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\cdots+b_nv_n+w_b&=0\\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n+w_c&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (273)$$

ceea ce exprimă funcțiile de condiție (268) reduse la forma liniară, sistemul de ecuații (273) fiind echivalent cu sistemul (268) pînă la termeni pătratici în $v_1, v_2, \ldots, v_n$, aproximație suficientă pentru calculele utilizate în metoda întrebuințată. Necesitatea reducerii formei generale la forma liniară este cerută de faptul că metoda celor mai mici pătrate este dezvoltată numai pentru astfel de funcții.

§ 134. Aplicații practice

1. *Compensarea unghiurilor și laturilor unui triunghi plan.* Pentru a concretiza teoria dezvoltată anterior, privitoare la compensările cu ponderi diferite, precum și apariția unor ecuații de condiție neliniare, tratăm problema compensării unui triunghi în care s-au măsurat atît unghiurile cît și laturile. Rezultatele măsurătorilor sînt

$$\left.\begin{aligned} \alpha&= 28°12'52'', & a&= 79{,}306\ \text{m} = 79\,306\ \text{mm},\\ \beta&=136°03'05'', & b&=116{,}406\ \text{m} =116\,406\ \text{mm},\\ \gamma&= 15°43'55'', & c&= 45{,}501\ \text{m} = 45\,501\ \text{mm}. \end{aligned}\right\} \qquad (274)$$

Pentru determinarea ponderilor este necesar să cunoaștem erorile medii pătratice ale mărimilor măsurate. Pentru acestea sînt date următoarele valori

$$m_\alpha=m_\beta=m_\gamma=\pm 7''; \quad m_a=\pm 8\ \text{mm}, \quad m_b=\pm 12\ \text{mm}, \quad m_c=\pm 5\ \text{mm}. \qquad (275)$$

Cum aceste valori sînt ele însele afectate de erori, putem lua pentru pătratele lor valorile rotunjite

$$m_\alpha^2=m_\beta^2=m_\gamma^2=50; \quad m_a^2=75, \quad m_b^2=150, \quad m_c^2=25. \qquad (276)$$

În aceste condiții, ponderile respective care, după cum știm, sînt proporționale cu inversele pătratelor erorilor medii pătratice, pot fi luate egale cu

$$p_\alpha=p_\beta=p_\gamma=\frac{1}{2}; \quad p_a=\frac{1}{3}, \quad p_b=\frac{1}{6}, \quad p_c=1, \qquad (277)$$

deoarece am luat ca unitate de pondere acea pondere care corespunde erorii medii pătratice ± 5.

Trebuie observat că, din punct de vedere practic, este importantă alegerea unităților pentru erorile medii pătratice, îndeosebi cînd avem de-a face, ca în cazul de față, cu mărimi de natură diferită, cum sînt unghiurile și laturile.

De exemplu, dacă am fi luat erorile medii pătratice în minute (în loc de secunde) pentru unghiuri și în milimetri pentru laturi, ponderile ar fi fost exprimate prin numere foarte incomode pentru calculele ulterioare.

În ceea ce privește stabilirea ecuațiilor de condiție, observăm că avem în primul rînd o singură ecuație unghiulară

$$\alpha+\beta+\gamma-180^\circ=0\,. \tag{278}$$

Pe de altă parte, cum pentru construcția triunghiului este necesară numai o singură latură și cum în cazul de față sînt măsurate și celelalte două laturi, trebuie să stabilim două ecuații laterale care, de altfel, pot fi alese în diferite moduri dintre relațiile trigonometrice între laturile și unghiurile unui triunghi. Cel mai convenabil este să alegem relațiile cunoscute exprimate prin raportul dintre laturi și sinusurile unghiurilor opuse, anume

$$\left.\begin{aligned} a\,\sin\beta-b\,\sin\alpha&=0\\ a\,\sin\gamma-c\,\sin\alpha&=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{279}$$

Alte relații de condiție independente nu mai există, căci oricare alte relații între laturi și unghiuri se pot exprima cu ajutorul celor scrise mai sus.

Observăm că, pe cînd ecuația (287) este liniară în raport cu unghiurile, celelalte două ecuații (279) nu sînt liniare în raport cu unghiurile; după teoria precedentă și așa cum am făcut în diferite probleme tratate pînă acum, este necesar să transformăm aceste relații pentru a le aduce la forma liniară, atît în raport cu laturile, cît și în raport cu unghiurile. În acest scop, aplicăm teoria generală a dezvoltării în serie (§ 132), în loc de operația de logaritmare pe care am utilizat-o de mai multe ori în exercițiile anterioare în scopul liniarizării. Deci, afectăm laturile și unghiurile de corecții corespunzătoare, ceea ce ne dă pentru expresiile (279)

$$\begin{aligned} (a+v_a)\sin(\beta+v_\beta)-(b+v_b)\sin(\alpha+v_\alpha)&=0\\ (a+v_a)\sin(\gamma+v_\gamma)-(c+v_c)\sin(\alpha+v_\alpha)&=0\,. \end{aligned}$$

Dezvoltăm apoi sinusurile în serii Taylor și păstrăm numai termenii de gradul întîi în variațiile v_i. Avem

$$\begin{aligned} (a+v_a)(\sin\beta+\cos\beta\cdot v_\beta)-(b+v_b)(\sin\alpha+\cos\alpha\cdot v_\alpha)&=0\\ (a+v_a)(\sin\gamma+\cos\gamma\cdot v_\gamma)-(c+v_c)(\sin\alpha+\cos\alpha\cdot v_\alpha)&=0 \end{aligned}$$

sau, neglijînd și produsele dintre mărimile v_i, putem scrie

$$\left.\begin{aligned} a\,\sin\beta-b\,\sin\alpha+\sin\beta\cdot v_a+a\cos\beta\cdot v_\beta-\sin\alpha\cdot v_b-b\cos\alpha\cdot v_\alpha 0&=\\ a\,\sin\gamma-c\,\sin\alpha+\sin\gamma\cdot v_a+a\cos\gamma\cdot v_\gamma-\sin\alpha\cdot v_c-c\cos\alpha\cdot v_\alpha&=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{280}$$

Aceste două ecuații laterale sînt într-adevăr liniare în erorile v.

Trebuie observat și faptul că variațiile v care privesc unghiurile trebuie exprimate în lungime de arc, nu în secunde, pentru a omogeniza relațiile (280). În acest scop, după cum se știe, trebuie ca valorile exprimate în secunde să

fie împărțite prin factorul de transformare $\varkappa = 206\,265''$. În definitiv, sistemul ecuațiilor de condiție, punînd în evidență discordanțele, este

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha + v_\beta + v_\gamma + w_1 &= 0\,, \\ -\frac{b}{\varkappa}\cos\alpha \cdot v_\alpha + \frac{a}{\varkappa}\cos\beta \cdot v_\beta + \sin\beta \cdot v_a - \sin\alpha \cdot v_b + w_2 &= 0 \\ -\frac{c}{\varkappa}\cos\alpha \cdot v_\alpha + \frac{a}{\varkappa}\cos\gamma \cdot v_\gamma + \sin\gamma \cdot v_a - \sin\alpha \cdot v_c + w_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (281)$$

unde am pus, pentru prescurtare,

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \alpha + \beta + \gamma - 180^\circ \\ w_2 &= a\sin\beta - b\sin\alpha \\ w_3 &= a\sin\gamma - c\sin\alpha\,. \end{aligned}\right\} \qquad (282)$$

În formulele precedente trebuie să exprimăm și laturile în milimetri, ca și corecțiile, pentru a păstra omogenitatea formulelor. Pentru a scrie explicit ecuațiile de condiție laterale, trebuie să calculăm coeficienții corecțiilor respective. Detaliem calculul acestor coeficienți cu ajutorul logaritmilor, în tabela următoare, cu datele (274).

Prima ecuație laterală

lg a	4,899306	lg b	5,065975	lg a	4,899306	lg b	5,065975
lg sinβ	$\bar{1}$,841368	lg sin α	$\bar{1}$,674653	lg cosβ	$\bar{1}$,857301	lg cos α	$\bar{1}$,945126
	4,740674		4,740628		$\bar{1}$,442179		$\bar{1}$,696673
$a\sin\beta$	+55039,4mm	$b\sin\alpha$	−55033,6 mm	$a\cos\frac{\beta}{\varkappa}$	−0,277	$b\cos\frac{\alpha}{\varkappa}$	+0,497
$w_2 = +5{,}8$ mm,		$\sin\alpha = +0{,}473$;		$\sin\beta = +0{,}694$			

Cu aceste date, prima ecuație laterală, cu valori rotunjite, este

$$-0{,}50\,v_\alpha - 0{,}28\,v_\beta + 0{,}69\,v_a - 0{,}47\,v_b + 5{,}8 = 0\,.$$

A doua ecuație laterală

lg a	4,899306	lg c	4,658017	lg c	4,658017	lg a	4,899306
lg sin γ	$\bar{1}$,433200	lg sin α	$\bar{1}$,674653	lg cos α	$\bar{1}$,945126	lg cos γ	$\bar{1}$,983426
	4,332506		4,332670	lg $\frac{1}{\varkappa}$	$\bar{6}$,685572	lg $\frac{1}{\varkappa}$	$\bar{6}$,685572
$a\sin\gamma$	+21505,0	$-c\sin\alpha$	−21513,8	$-c\cos\frac{\alpha}{\varkappa}$	$\bar{1}$,288715 −0,1944	$a\cos\frac{\gamma}{\varkappa}$	$\bar{1}$,568304 +0,3701
$w_3 = -8{,}8$,		$\sin\gamma = +0{,}2709$,		$\sin\alpha = 0{,}473$.			

Cu aceste date, a doua ecuație laterală, cu valori rotunjite, este

$$-0{,}19\,v_\alpha + 0{,}37\,v_\gamma + 0{,}27\,v_a - 0{,}47\,v_c - 8{,}8 = 0\,,$$

Cum $\alpha + \beta + \gamma = 179^\circ 59' 52''$, rezultă $w_1 = -8$.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
I A Ş I

Putem forma acum schema coeficienţilor ecuaţiilor de condiţie

	1	2	3	4	5	6	
	v_α	v_β	v_γ	v_a	v_b	v_c	w
$1/p$	2	2	2	3	6	1	
a	+1,00	+1,00	+1,00	0	0	0	−8,0
b	−0,50	−0,28	0	+0,69	−0,47	0	+5,8
c	−0,19	0	+0,37	+0,27	0	−0,47	−8,8

Cu aceste date formăm ecuaţiile normale ale corelatelor (236) şi obţinem

$$\left.\begin{aligned} 6{,}00\ K_a - 1{,}56\ K_b + 0{,}36\ K_c - 8{,}0 &= 0 \\ +3{,}42\ K_b + 0{,}75\ K_c + 5{,}8 &= 0 \\ +0{,}78\ K_c - 8{,}8 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (283)$$

Rezolvarea acestor ecuaţii este simplă; obţinem

$$K_a = -1{,}33, \qquad K_b = -6{,}17, \qquad K_c = +17{,}67. \qquad (284)$$

Înlocuind aceste valori în relaţiile

$$\begin{aligned} v_\alpha &= a_1 K_a + b_1 K_b + c_1 K_c \\ v_\beta &= a_2 K_a + b_2 K_b + c_2 K_c \\ v_\gamma &= a_3 K_a + b_3 K_b + c_3 K_c, \\ v_a &= a_4 K_a + b_4 K_b + c_4 K_c \\ v_b &= a_5 K_a + b_5 K_b + c_5 K_c \\ v_c &= a_6 K_a + b_6 K_b + c_6 K_c, \end{aligned}$$

care corespund ecuaţiilor (249), se obţine pentru corecţii

$$\left.\begin{aligned} v_\alpha &= -\ 3{,}22'', & v_a &= +\ 1{,}54 \text{ mm}, \\ v_\beta &= +\ 0{,}80'', & v_b &= +17{,}40 \text{ mm}, \\ v_\gamma &= +10{,}42'', & v_c &= -\ 8{,}30 \text{ mm}. \end{aligned}\right\} \qquad (285)$$

Aplicînd aceste corecţii la valorile obţinute prin măsurători, deducem valorile compensate

$$\left.\begin{aligned} \alpha + v_\alpha &= 28°12'48{,}8'' & a + v_a &= 79\,307{,}5 \text{ mm} \\ \beta + v_\beta &= 136°03'05{,}8'' & b + v_b &= 116\,423{,}4 \text{ mm} \\ \gamma + v_\gamma &= 15°44'05{,}4'' & c + v_c &= 45\,492{,}7 \text{ mm} \\ & 180°00'00{,}0'' \end{aligned}\right\} \qquad (286)$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu aceasta, problema compensării este terminată. Rămîne să verificăm satisfacerea celor două ecuaţii de condiţie laterale, întrucît verificarea ecuaţiei unghiulare reiese din (268)

$$\alpha+\beta+\gamma+\nu_\alpha+\nu_\beta+\nu_\gamma=180^\circ.$$

Pentru verificarea ecuaţiilor laterale este suficient să comparăm valorile logaritmice. Cu valorile compensate (286) avem

$\lg a = 4{,}899314$	$\lg b = 5{,}066041$	$\lg a = 4{,}899314$	$\lg c = 4{,}657942$
$\lg \sin\beta = \bar{1}{,}841366$	$\lg \sin\alpha = \bar{1}{,}674640$	$\lg \sin\gamma = \bar{1}{,}433266$	$\lg \sin\alpha = \bar{1}{,}674640$
4,740680	4,740681	4,332580	4,332582

Concordanţa este perfect satisfăcătoare.

Rămîne să mai calculăm eroarea medie pătratică a unităţii de pondere. În acest scop, formăm tabela

vv	vvp	$-wK$
10,37	5,18	−10,64
0,64	0,32	+35,79
108,58	54,29	+155,50
2,37	0,79	+180,65
302,76	50,46	
68,89	68,89	
	179,93	

Ambele valori coincid satisfăcător, astfel încît este verificată formula (244). Avem deci pentru eroarea medie pătratică a unităţii de pondere, după formula (240),

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{179{,}93}{3}}=\pm 7{,}75. \qquad (287)$$

Observăm că, întrucît am luat iniţial drept unitate de pondere acea pondere care corespunde erorii medii pătratice $\pm$ 5, ar fi trebuit ca şi invers, eroarea medie pătratică a unităţii de pondere calculată prin formula (287) să fie egală cu 5. Diferenţa se explică prin faptul că în calculul lui μ am luat în considerare numai un număr foarte redus de valori pentru mărimile v.

Pentru a concretiza şi mai mult aplicarea teoriei, să mai tratăm problema inversă celei rezolvate, şi anume din valoarea compensată a unui unghi, de exemplu a unghiului α, să determinăm ponderea acestui unghi după compensare, ştiind că ponderea sa înainte de compensare este dată şi egală cu $\frac{1}{2}$ [formulele (277)].

Să considerăm, în acest scop, funcția de valorile compensate

$$f=\alpha+v_\alpha,$$

avînd

$$A_1=1,\ A_2=A_3=\ldots=0, \tag{288}$$

coeficienții necesari ecuațiilor de tranziție (252), și știind că ceilalți coeficienți ai acestor ecuații se iau direct din ecuațiile normale pe care le-am scris (283). Avem

$$\left[\frac{aA}{p}\right]=+2{,}00,\ \left[\frac{bA}{p}\right]=-1{,}00,\ \left[\frac{cA}{p}\right]=-0{,}38, \tag{289}$$

astfel încît ecuațiile de tranziție sînt, după (283) și (288),

$$\begin{aligned} 6{,}00\ q_1-1{,}56\ q_2+0{,}36\ q_3+2{,}00&=0\\ +3{,}42\ q_2+0{,}75\ q_3-1{,}00&=0\\ +0{,}78\ q_3-0{,}38&=0. \end{aligned}$$

Aceste ecuații se rezolvă, după cum știm, la fel ca ecuațiile normale. Obținem

$$q_1=-0{,}39,\ q_2=-0{,}04,\ q_3=+0{,}70.$$

Cu aceste valori calculăm coeficienții f după relațiile (255) și obținem

$$\begin{aligned} f_1&=+1{,}00-0{,}39+0{,}02\ -0{,}13\ =+0{,}50\\ f_2&=\ 0\ -0{,}39+0{,}01\ +0\ =-0{,}38\\ f_3&=\ 0\ -0{,}39+0\ +0{,}259=-0{,}13\\ f_4&=\ 0\ +0\ -0{,}027\ +0{,}189=+0{,}16\\ f_5&=\ 0\ +0\ +0{,}0188+0\ =+0{,}02\\ f_6&=\ 0\ +0\ +0\ -0{,}329=-0{,}33. \end{aligned}$$

Formula (256) ne dă acum ponderea unghiului α după compensarea

$$\frac{1}{P_\alpha}=\left[\frac{ff}{p}\right]=0{,}50+0{,}29+0{,}03+0{,}08+0{,}00+0{,}11$$

deci

$$\frac{1}{P_\alpha}=1{,}01\qquad P_\alpha=0{,}99.$$

Rezultă că ponderea unghiului α s-a mărit după compensare pînă la valoarea dublă a celei dinainte de compensare.

2. Să tratăm exemplul numeric de la § 120, ca o problemă de compensare condiționată, ceea ce este posibil deoarece în acest exemplu am presupus măsurate unghiurile x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, cu vizări de la un punct central către patru puncte periferice, obținînd valorile

$$\begin{aligned} \alpha_1&=112°25'37'' & \alpha_2&=\ 84°19'48''\\ \alpha_3&=\ 87°34'24'' & \alpha_4&=\ 75°40'41'' \\ \alpha_5&=196°45'15'' & \alpha_6&=163°14'17''. \end{aligned} \tag{290}$$

Scanned with OKEN Scanner

Din fig. 12 reiese că aceste șase unghiuri nu sînt independente și că sînt suficiente numai trei dintre ele pentru determinarea direcțiilor indicate pe figură. Aceasta înseamnă că avem trei determinări supranumerare; rezultă existența a trei relații de condiție. Le alegem precum urmează

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4-360^\circ &= 0 \\ x_1+x_2-x_5 &= 0 \\ x_3+x_4-x_6 &= 0. \end{aligned}$$

Valorile măsurate (290) nu satisfac riguros ecuațiile precedente, ci se constată deosebiri care determină discordanțele

$$\left.\begin{aligned} w_a &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4-360^\circ = +30'' \\ w_b &= \alpha_1+\alpha_2-\alpha_5 \quad\quad = +10'' \\ w_c &= \alpha_3+\alpha_4-\alpha_6 \quad\quad = +48'' \end{aligned}\right\} \qquad (291)$$

Ecuațiile corecțiilor sînt, prin urmare [§ 128, ecuațiile (209)],

$$\begin{aligned} v\ +v_2+v_3+v_4+30'' &= 0 \quad (a) \\ v_1+v_2-v_5 \quad +10'' &= 0 \quad (b) \\ v_3+v_4-v_6 \quad +48'' &= 0 \quad (c). \end{aligned}$$

Să formăm schemele pentru stabilirea coeficienților ecuațiilor normale ale corelatelor.

Tabela coeficienților și a corecțiilor

Corecția	a	b	c	s	aa	ab	ac	as	bb	bc	bs	cc	cs	$K_a\cdot a$	$K_b\cdot b$	$K_c\cdot c$	v	vv
v_1	+1	+1	0	+2	+1	+1	0	+2	+1	0	+2	0	0	+6,5	−7,7	0	−1,2″	1,44
v_2	+1	+1	0	+2	+1	+1	0	+2	+1	0	+2	0	0	+6,5	−7,7	0	−1,2″	1,44
v_3	+1	0	+1	+2	+1	0	+1	+2	0	0	0	+1	+2	+6,5	0	−20,3	−13,8″	190,44
v_4	+1	0	+1	+2	+1	0	+1	+2	0	0	0	+1	+2	+6,5	0	−20,3	−13,8″	190,44
v_5	0	−1	0	−1	0	0	0	0	+1	0	+1	0	0	0	+7,7	0	+7,7″	59,29
v_6	0	0	−1	−1	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1	0	0	+20,3	+20,3″	412,09
																	$[vv]$ =	855,14

Din această tabelă se extrag coeficienții ecuațiilor corelatelor. Se găsește

$$\left.\begin{aligned} +4K_a+2K_b+2K_c+30 &= 0 \\ +2K_a+3K_b+0\cdot K_c+10 &= 0 \\ +2K_a+0\cdot K_b+3K_c+48 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (292)$$

Rezolvarea acestor ecuații ne dă corelatele

$$K_a = +\frac{13}{2} = +6{,}50, \qquad K_b = -\frac{23}{3} = -7{,}67, \qquad K_c = -\frac{61}{3} = -20{,}33.$$

Ca operație de control, calculăm suma pătratelor erorilor aparente, după relația (242); obținem cu valorile (291)

$$[vv] = -[Kw] = -195{,}00 + 76{,}67 + 975{,}84 = +857{,}51$$

în satisfăcătoare concordanță cu valoarea din tabelă.

Aplicînd valorilor (290) corecțiile care figurează în tabelă, rezultă valorile compensate

$$x_1 = 112°25'35{,}8'', \quad x_4 = 75°46'27{,}2'',$$
$$x_2 = 84°19'46{,}8'', \quad x_5 = 196°45'22{,}7'',$$
$$x_3 = 87°34'10{,}2'', \quad x_6 = 163°14'37{,}3''.$$

Comparînd acest rezultat cu cel găsit la § 120, constatăm că valorile coincid, pînă la o diferență în x_5 și x_6 de 0,1", ceea ce se justifică prin operația de rotunjire pe care am aplicat-o în calculele efectuate la acel paragraf.

Eroarea medie pătratică după formula lui Bessel generalizată (109) este deci

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{6-3}} = \pm\sqrt{\frac{855{,}14}{3}} = \pm 16'',9.$$

Să aplicăm teoria dezvoltată la § 132 pentru determinarea erorilor medii pătratice ale fiecărei măsurători în parte.

În acest scop, considerăm succesiv aceste expresii ca funcții (246). De exemplu, pentru x_1 vom scrie $f = x_1$, astfel încît pentru această funcție avem $A_1 = 1$. $A_2 = A_3 = \ldots = A_n = 0$. Rezultă

$$[aA] = +1, \qquad [bA] = +1, \qquad [cA] = 0.$$

Cu aceste valori putem scrie ecuațiile de tranziție (252)

$$4q_a + 2q_b + 2q_c + 1 = 0$$
$$2q_a + 3q_b + 0 \cdot q_c + 1 = 0$$
$$2q_a + 0 \cdot q_b + 3q_c + 1 = 0,$$

a căror soluție este

$$q_a = -\frac{1}{4}, \quad q_b = -\frac{1}{6}, \quad q_c = +\frac{1}{6}.$$

Cu valorile precedente formula (255) ne dă

$$f_1 = +\frac{7}{12}, \; f_2 = -\frac{5}{12}, \; f_3 = -\frac{1}{12}, \; f_4 = -\frac{1}{12}, \; f_5 = +\frac{2}{12}, \; f_6 = -\frac{2}{12},$$

astfel încît obținem suma

$$[ff] = \frac{84}{144} = \frac{7}{12}.$$

Din considerațiile de la § 132, am constatat că această valoare, dată de relația (256), reprezintă inversul ponderii funcției respective (în speță x_1) pentru valoarea compensată; prin urmare, acest termen exprimă valoarea

Scanned with OKEN Scanner

pătratului erorii medii pătratice a lui x_1 raportată la pătratul erorii medii pătratice totale luată ca eroare a unității de pondere. Deci,

$$m_1 = \sqrt{\frac{7}{12}}\, m = \pm 12{,}9'' \text{ și } p_1 = 1{,}74.$$

Procedînd la fel cu celelalte mărimi x_2, x_3 și x_4 obținem aceleași valori, după cum se verifică imediat; deci

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \pm 12{,}9'',\ p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1{,}74.$$

Pentru calculul erorii medii pătratice a lui x_5 (la fel și x_6), procedînd la fel, deducem

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_6 = 0,\ A_5 = 1.$$

$$[aA] = 0,\ [bA] = -1,\ [cA] = 0.$$

Ecuațiile (252) devin în acest caz

$$\begin{aligned} 4q_a + 2q_b \times 2q_c + 0 &= 0 \\ 2q_a + 3q_b + 0 \cdot q_c - 1 &= 0 \\ 2q_a + 0 \cdot q_b + 3q_c + 0 &= 0, \end{aligned}$$

de unde rezultă

$$q_a = -\frac{1}{2},\quad q_b = +\frac{2}{3},\quad q_c = +\frac{1}{3}$$

și, prin urmare,

$$f_1 = +\frac{1}{6},\ f_2 = +\frac{1}{6},\ f_3 = -\frac{1}{6},\ f_4 = -\frac{1}{6},\ f_5 = +\frac{2}{6},\ f_6 = -\frac{2}{6},$$

astfel încît

$$[ff] = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Așadar,

$$m_5 = m_6 = \pm 9{,}8'',\ p_5 = p_6 = 3{,}00.$$

La aceleași valori trebuie să ajungem dacă formăm toți coeficienții care figurează în expresia din membrul al doilea al relației (256), ceea ce constituie o verificare a calculului precedent și ne conduce la aplicarea directă a formulei (256). Avem

$$[aa] = +4$$

$$[bb \cdot 1] = bb - \frac{[ab]^2}{[aa]} = +2$$

$$[bc \cdot 1] = bc - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} = -1$$

$$[cc \cdot 1] = cc - \frac{[ac]^2}{[aa]} = +2$$

$$[cc \cdot 2] = [cc \cdot 1] - \frac{[bc \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} = +\frac{3}{2}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Formăm schema termenilor care figurează în relaţia (256)

Nr.	$[AA]$	$[aA]$	$[bA]$	$[cA]$	$[bA\cdot 1]$	$[cA\cdot 1]$	$[cA\cdot 2]$
1	+1	+1	+1	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
2	+1	+1	+1	0	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
3	+1	+1	0	+1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$
4	+1	+1	0	+1	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$
5	+1	0	−1	0	−1	0	$-\frac{1}{2}$
6	+1	0	0	−1	0	−1	−1

Nr.	$[aA]^2$	$[bA\cdot 1]^2$	$[cA\cdot 2]^2$	$\frac{[aA]^2}{[aa]}$	$\frac{[bA\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}$	$\frac{[cA\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}$	$[AA]$	$\{\cdots\}$	$[AA]-\{\cdots\}$
1	+1	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{24}$	+1	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{7}{12}$
2	+1	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{24}$	+1	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{7}{12}$
3	+1	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{24}$	+1	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{7}{12}$
4	+1	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{16}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{8}$	$+\frac{1}{24}$	+1	$+\frac{5}{12}$	$+\frac{7}{12}$
5	+0	+1	$+\frac{1}{4}$	0	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	+1	$+\frac{8}{12}$	$+\frac{1}{3}$
6	+0	0	+1	0	0	$+\frac{2}{3}$	+1	$+\frac{8}{12}$	$+\frac{1}{3}$

Comparînd rezultatul din schemă $[AA]-\{\cdots\}$ cu cel precedent $[ff]$, constatăm perfecta concordanţă.

Pentru completarea aplicaţiei numerice a formulelor şi consideraţiilor precedente, observăm că am scris direct soluţia sistemului (292) al ecuaţiilor corelatelor (232); cum acest sistem serveşte şi la rezolvarea ecuaţiei (252), este indicat să construim schema de la § 121, tabela 3 (Gauss II)

Scanned with OKEN Scanner

Nr.		[a	[b	[c	l/w	s	l/A
1	a]	+4	+2	+2	+30	+38	0
2			+0,5	+0,5	+7,5	+8,5	0
3	b]		+3	0	+10	+15	−1
4			+1	+1	+15	+19	0
5	b · 1]		+2	−1	−5	−4	−1
6				−0,5	−2,5	−2	−0,5
7	c]			+3	+48	+53	0
8				+1	+15	+19	0
9	c · 1]			+2	+33	+34	0
10				+0,5	+2,5	+2	+0,5
11	c · 2]			+1,5	+30,5	+32	−0,5
12					+20,33	+21,13	−0,33
13	l]				0	+88	+1
14					+225	+285	0
15	l · 1]				−225	−187	+1
16					+12,5	+10	+0,5
17	l · 2]				−237,5	−20,7	+0,5
18					+620,1	+650,6	+0,17
19	l · 3]			K_c	−857,6	−857,6	+0,33
20			K_b	−20,33			
21		K_a	−7,67	+10,17	−2,5		
22		+6,5	+3,83	−10,17	+7,5		

Din schema precedentă putem forma, pentru control, expresia

$$[ls]=[al]+[bl]+[cl]+[ll]=w_a+w_b+w_c=+88{,}00,$$

valoarea conținută în schemă în rîndul (13) coloana s, iar suma discordanțelor este dată de ecuațiile (291). Concordanța este perfectă.

Subordonînd lui $[ll]$ un $w_l=0$, putem calcula simbolurile

$[w_b \cdot 1]=[bl \cdot 1]=-5$ ... schemă $R(5)$, coloana (l/w)
$[w_c \cdot 1]=[cl \cdot 1]=+33$ ... schemă $R(9)$, coloana (l/w)
$[w_l \cdot 1]=[0 \cdot 1]=[ll \cdot 1]=-225$ ... schemă $R(15)$, coloana (l/w)

Scanned with OKEN Scanner

$$[w_c \cdot 2]=[cl \cdot 2]=+\ 30{,}5 \cdots \text{schemă } R(11),\ \text{coloana } (l/w)$$
$$[w_l \cdot 2]=[0 \cdot 2]=[ll \cdot 2]=-237{,}5 \cdots \text{schemă } R(17),\ \text{coloana } (l/w)$$
$$[w_l \cdot 3]=[0 \cdot 3]=[ll \cdot 3]=-857{,}7 \cdots \text{schemă } R(19),\ \text{coloana } (l/w).$$

Dar, după formula cunoscută,

$$-[ll \cdot 3]=[vv]=857{,}7,$$

valoare în satisfăcătoare concordanţă cu valorile găsite anterior (+855,14 din tabelă şi +857,51=—[Kw]). Formula precedentă nu este altceva decît formula (243), după cum ştim.

Tot din consideraţiile dezvoltate la § 132, am constatat că, dacă în sistemul corelatelor înlocuim pe l prin A, obţinem formula (259), pe care vrem s-o verificăm în exemplul de faţă. Din schemă avem

$$[aA]=[al]=0 \cdots \text{schemă } R(1),\ \text{coloana } (l/A)$$
$$[bA]=[bl]=-1 \cdots \text{schemă } R(3),\ \text{coloana } (l/A)$$
$$[cA]=[cl]=0 \cdots \text{schemă } R(7),\ \text{coloana } (l/A)$$
$$[AA]=[ll]=+1 \cdots \text{schemă } R(13),\ \text{coloana } (l/A).$$

Din tabela anterioară (p. 323) extragem

$$[bA \cdot 1]=-1,\ R(5)$$
$$[cA \cdot 1]=0,\ R(5)$$
$$[cA \cdot 2]=-0{,}5,\ R(5)$$
$$[ff]=[AA \cdot 3]=+0{,}33=+\frac{1}{3},\ \text{schemă } R(19),\ \text{coloana } (l/A),$$

în concordanţă perfectă cu rezultatul anterior. Rezultă, la fel, $m_5=\pm 9{,}8''$ şi $p_5=3$.

3. *Aplicaţie practică* pentru măsurători de precizie inegale, cu ecuaţii de condiţie, în vederea concretizării teoriei de la § 130 şi următoarele.

În acest scop, reluăm datele de la § 120, pentru reţeaua de nivelment figurată la acest paragraf, cu valorile date în prima tabelă din § 122.

Numărul care indică diferenţa de nivel	Distanţa, km	Diferenţa de nivel măsurată, m
$1 \cdots x_1$	3,1	189,404
$2 \cdots x_2$	9,3	736,977
$3 \cdots x_3$	59,7	376,607
$4 \cdots x_4$	6,2	547,576
$5 \cdots x_5$	16,1	273,528
$6 \cdots x_6$	35,1	187,274
$7 \cdots x_7$	12,1	274,082
$8 \cdots x_8$	9,3	86,261

(293)

Scanned with OKEN Scanner

Din fig. 13 observăm că cu cele opt diferențe de nivel x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 putem forma următoarele patru ecuații de condiție geometrice

$$\begin{aligned} -x_1+x_2-x_4&=0\\ +x_4-x_5-x_7&=0\\ +x_5-x_6-x_8&=0\\ +x_1-x_3+x_6&=0. \end{aligned}$$

Evident, cu valorile determinate experimental (l_i) din tabela (293) nu putem satisface riguros ecuațiile precedente, ci obținem discordanțele

$$\left.\begin{aligned} w_a&=-l_1+l_2-l_4=-\ 3\ \text{mm}\\ w_b&=+l_4-l_5-l_7=-34\ \text{mm}\\ w_c&=+l_5-l_6-l_8=-\ 7\ \text{mm}\\ w_d&=+l_1-l_5-l_6=+71\ \text{mm},\end{aligned}\right\} \qquad (294)$$

Coeficienții simpli și

	a	b	c	d	s	$\frac{1}{p}$	$\frac{aa}{p}$	$\frac{ab}{p}$	$\frac{ac}{p}$	$\frac{ad}{p}$
1	−1	0	0	+1	0	3,1	3,1	0	0	−3,1
2	+1	0	0	0	+1	9,3	+9,3	0	0	0
3	0	0	0	−1	−1	59,7	0	0	0	0
4	−1	+1	0	0	0	6,2	+6,2	−6,2	0	0
5	0	−1	+1	0	0	16,1	0	0	0	0
6	0	0	−1	+1	0	35,1	0	0	0	0
7	0	−1	0	0	−1	12,1	0	0	0	0
8	0	0	−1	0	−1	9,3	0	0	0	0
	−1	−1	−1	+1	−2	—	+18,6	−6,2	0	−3,1

Scanned with OKEN Scanner

ceea ce ne permite să scriem ecuaţiile corecţiilor (209)

$$\begin{aligned} -v_1+v_2-v_4-\ 3&=0 \quad (a)\\ +v_4-v_5-v_7-34&=0 \quad (b)\\ +v_5-v_6-v_8-\ 7&=0 \quad (c)\\ +v_1-v_3+v_6+71&=0. \quad (d) \end{aligned}$$

Ca şi în § 120, atribuim măsurătorilor efectuate ponderi invers proporţionale cu distanţele respective, luînd factorul de proporţionalitate egal cu unitatea, astfel încît $p_i=\frac{1}{D_i}$ $(i=1, 2, \cdots, 8)$, adică raportăm la 1 km unitate de lungime pentru distanţa D_i.

Din tabela dată mai jos putem construi ecuaţiile corelatelor

$$\left.\begin{aligned} +18{,}6\,K_a-\ 6{,}2\,K_b+\ 0\cdot K_c-\ 3{,}1\,K_d-\ 3&=0\\ -\ 6{,}2\,K_a+34{,}4\,K_b-16{,}1\,K_c+\ 0\cdot K_d-34&=0.\\ 0\cdot K_a-16{,}1\,K_b+60{,}5\,K_c-35{,}1\,K_d-\ 7&=0\\ -\ 3{,}1\,K_a-\ 0\cdot K_b-35{,}1\,K_c+97{,}9\,K_d+71&=0. \end{aligned}\right\} \quad (295)$$

coeficienţii ponderaţi

$\frac{as}{p}$	$\frac{bb}{p}$	$\frac{bc}{p}$	$\frac{bd}{p}$	$\frac{bs}{p}$	$\frac{cc}{p}$	$\frac{cd}{p}$	$\frac{cs}{p}$	$\frac{dd}{p}$	$\frac{ds}{p}$
0	0	0	0	0	0	0	0	+3,1	0
+9,3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	+59,7	+59,7
0	+6,2	0	0	0	0	0	0	0	0
0	+16,1	+16,1	0	0	+16,1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+35,1	−35,1	0	+35,1	0
0	+12,1	0	0	+12,1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	+9,3	0	+9,3	0	0
+9,3	+34,4	+16,1	0	+12,1	+60,5	−35,1	+9,3	+97,9	+59,7

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuații se rezolvă în modul obișnuit folosind schema de mai jos, pe care o scriem și pentru două funcții de necunoscutele x_l, alese pentru ilustrarea calculului teoretic; și anume

$$f = x_3, \quad f' = x_4 - x_6,$$

astfel încît coeficienții respectivi sînt

$$A_1 = A_2 = A_4 = A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 0, \quad A_3 = +1 \text{ pentru funcția } f,$$

$$A_1' = A_2' = A_3' = A_5' = A_7' = A_8' = 0, \quad A_4' = +1, \quad A_6' = -1, \text{ pentru funcția } f'.$$

	$\frac{1}{p}$	A		$\frac{AA}{p}$		$\frac{aA}{p}$		$\frac{bA}{p}$		$\frac{cA}{p}$		$\frac{dA}{p}$	
1	3,1	0	0										
2	9,3	0	0										
3	59,7	+1	0	+59,7		0		0		0		−59,7	
4	6,2	0	+1		+6,2		−6,2		+6,2		0		0
5	16,1	0	0										
6	35,1	0	−1		+35,1		0		0		+35,1		- 35,1
7	12,1	0	0										
8	9,3	0	0										
				+59,7	+41,3	0	−6,2	0	+6,2	0	+35,1	−59,7	−35,1

După cum vom constata din schema de rezolvare a ecuațiilor corelatelor (295), avem soluția

$$K_a = +0{,}3901, \quad K_b = +1{,}0474, \quad K_c = -0{,}0241, \quad K_d = -0{,}7215. \tag{296}$$

Cu aceste valori putem forma tabela 16.

Pentru calculul ponderii folosim relația (257) sau echivalenta ei

$$\left[\frac{ff}{p}\right] = \left[\frac{AA}{p} \cdot 3\right] \tag{297}$$

pentru fiecare f și f' în parte. După aceasta, vom deduce eroarea medie pătratică, după formula

$$m_f^2 = \mu^2 \left[\frac{ff}{p}\right], \tag{298}$$

unde μ este eroarea unității de pondere raportată la 1 km

$$\mu_{1\ km} = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{r}} = \pm\sqrt{\frac{88{,}05}{4}} = \pm 4{,}69 \text{ mm}. \tag{299}$$

Am luat valoarea sumei $[pvv] = 88{,}05$ din tabela 16; formula de control $[Kw] = -[pvv]$ ne dă cu valoarea (294)

$$[w \cdot K] = w_a K_a + w_b K_b + w_c K_c + w_d K_d = -87{,}84,$$

în concordanță satisfăcătoare cu valoarea din tabela 16.

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 16

	a/p	b/p	c/p	d/p	$a/p \cdot K_a$	$b/p \cdot K_b$	$c/p \cdot K_c$	$d/p \cdot K_d$	v	vv	pvv
1	−3,1	0	0	+3,1	−1,209	0	0	−2,237	−3,45	+11,90	3,84
2	+9,3	0	0	0	+3,628	0	0	0	+3,63	+13,18	1,42
3	0	0	0	−59,7	0	0	0	+43,080	+43,08	+1855,89	31,55
4	−6,2	+6,2	0	0	−2,419	+6,493	0	0	+4,07	+16,56	2,68
5	0	−16,1	+16,1	0	0	−16,862	−0,390	0	−17,25	+297,56	18,45
6	0	0	−35,1	+35,1	0	0	+0,849	−25,328	−24,48	+599,27	16,78
7	0	−12,1	0	0	0	−12,672	0	0	−12,67	+160,53	13,32
8	0	0	−9,3	0	0	0	+0,225	0	+0,23	0,05	0,01
9	0	−22,0	−28,3	−21,5							88,05

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd corecţiile prevăzute în tabela 16, obţinem valorile (293) compensate

$$x_1 = 189{,}40400 - 0{,}00345 = 189{,}40055 \text{ m}$$
$$x_2 = 736{,}97700 + 0{,}00363 = 736{,}98063 \text{ m}$$
$$x_3 = 376{,}60700 + 0{,}04308 = 376{,}65008 \text{ m}$$
$$x_4 = 547{,}57600 + 0{,}00407 = 547{,}58007 \text{ m}$$
$$x_5 = 273{,}52800 - 0{,}01725 = 273{,}51075 \text{ m}$$
$$x_6 = 187{,}27400 - 0{,}02448 = 187{,}24952 \text{ m}$$
$$x_7 = 274{,}08200 - 0{,}01267 = 274{,}06933 \text{ m}$$
$$x_8 = 86{,}26100 + 0{,}00023 = 86{,}26123 \text{ m}.$$

Schema pentru rezolvarea ecuaţiilor corelatelor

	a	b	c	d	l/w	s	l/A	l/A'
a	+18,6	−6,2	0	−3,1	−3,0	+6,3	0	−6,2
		+0,3333	0	−0,1667	+0,1613			
b		+34,400	−16,1	0	−34,0	−21,9	0	+6,200
		−2,066	0	−1,033	−1,0	+2,1	0	−2,066
b·1		+32,334	−16,1	−1,033	−35,0	−19,8	0	+4,143
			+0,4979	+0,0320	+1,0815			
c			+60,5	−35,1	−7,0	+2,3	0	+35,1
			0	0	0	0	0	0
c·1			+60,5	−35,1	−7,0	+2,3	0	+35,1
			−8,016	−0,514	−17,427	−9,858	0	+2,058
c·2			+52,484	−35,614	−24,427	−7,558	0	+37,158
				+0,6786	+0,4655			
d				+97,900	+71,0	+130,70	−59,7	−35,100
				+0,517	+0,5	−1,05	0	+1,034
d·1				+97,383	+70,5	+131,75	−59,7	−36,134
				−0,033	−1,12	−0,63	0	+0,132
d·2				+97,350	+69,38	+131,12	−59,7	−36,002
				−24,158	−16,576	−5,13	0	+25,215
d·3				+73,192	+52,804	+125,99	−59,7	−10,787
				$K_d = -0{,}7215$				
			$K_c = -0{,}0241$	−0,4896	+0,4655			
		$K_b = +1{,}0474$	+0,0120	−0,0231	+1,0825			
	$K_a = +0{,}3901$	−0,3491	0	+0,1203	+0,1613			

Scanned with OKEN Scanner

Să trecem la calculul expresiei (298) pentru cele două cazuri considerate. În primul rînd, din schemă extragem pentru ambele funcții

$$\left[\frac{aa}{p}\right]=+18{,}6\,,\qquad \left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]=+32{,}33\,,$$

$$\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]=+52{,}48\,,\qquad \left[\frac{dd}{p}\cdot 3\right]=73{,}19\,.$$

După tabela de la pag. 328 deducem pentru $f=x_3$

$$\left[\frac{aA}{p}\right]=0\,,\quad \left[\frac{bA}{p}\cdot 1\right]=0\,,\quad \left[\frac{cA}{p}\cdot 2\right]=0\,,\quad \left[\frac{dA}{p}\right]=-59{,}7\,,\quad \left[\frac{AA}{p}\right]=+59{,}7.$$

Pentru $f'=x_4-x_6$ obținem tot din tabela de la pag. 328

$$\left[\frac{aA'}{p}\right]=-6{,}2\,,\quad \left[\frac{bA'}{p}\cdot 1\right]=+4{,}13\,,\quad \left[\frac{cA'}{p}\cdot 2\right]=+37{,}16\,,$$

$$\left[\frac{dA'}{p}\right]=-10{,}79\,,\qquad \left[\frac{A'A'}{p}\right]=+41{,}3\,.$$

Introducînd aceste valori în formula (298), scrisă explicit

$$m_f^2=\mu^2\left\{\left[\frac{AA}{p}\right]-\left(\frac{\left[\frac{AA}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}+\frac{\left[\frac{bA}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}+\frac{\left[\frac{cA}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}+\frac{\left[\frac{dA}{p}\cdot 3\right]^2}{\left[\frac{dd}{p}\cdot 3\right]}\right)\right\}$$

se obține, avînd în vedere (298),

$$m_f^2=\mu^2\left\{+59{,}7-\frac{(59{,}7)^2}{73{,}18}\right\}=11{,}0\ \mu^2\,,$$

astfel încît eroarea medie pătratică a valorii x_3 este

$$m_f=\pm\,\mu\sqrt{11{,}0}=\pm 4{,}69\,\sqrt{11{,}0}=\pm 15{,}6\ \text{mm}\,.$$

Pentru $f'=x_4-x_6$ obținem

$$m_f^2=\mu^2\left\{+41{,}3-\left(\frac{38{,}44}{18{,}60}+\frac{17{,}06}{32{,}33}+\frac{1380{,}9}{52{,}48}+\frac{116{,}4}{73{,}18}\right)\right\}=$$
$$=\mu^2(+41{,}3-2{,}07-0{,}53-26{,}31-1{,}59)=10{,}8\,\mu^2\,,$$

de unde rezultă

$$m_{f'}=\pm\mu\,\sqrt{10{,}8}=\pm 4{,}69\,\sqrt{10{,}8}=\pm 15{,}4\ \text{mm}\,,$$

în perfectă concordanță cu valoarea găsită în § 122 ca eroare medie pătratică pentru funcția $f=x-t$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 135. Compensări parțiale

În multe cazuri care se prezintă în practică, este uneori mai util și comod să nu se procedeze dintr-odată la compensarea tuturor ecuațiilor de condiție, ci să se formeze grupe de ecuații de condiție care să fie tratate succesiv, astfel încît rezultatul final să fie, evident, același.

Pentru lămurirea acestei probleme, să considerăm cazul a trei ecuații de condiție cu patru necunoscute (numărul ecuațiilor de condiție mai mic decît numărul necunoscutelor), rezumînd mai întîi mersul obișnuit la compensări complete fără descompunere în grupe.

Fie ecuațiile de condiție între corecții, pe care le însemnăm cu V_i, astfel încît

$$[VV]=\text{minim}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3+a_4V_4+w_1&=0\\ b_1V_1+b_2V_2+b_3V_3+b_4V_4+w_2&=0\\ c_1V_1+c_2V_2+c_3V_3+c_4V_4+w_3&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (300)$$

din care deducem ecuațiile normale ale corelatelor

$$\left.\begin{aligned} [aa]K_a+[ab]K_b+[ac]K_c+w_1&=0\\ [ab]K_a+[bb]K_b+[bc]K_c+w_2&=0\\ [ac]K_a+[bc]K_b+[cc]K_c+w_3&=0. \end{aligned}\right\} \qquad (301)$$

Ecuațiile normale după prima transformare devin

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot 1]K_b+[bc\cdot 1]K_c+(w_2\cdot 1)&=0\\ [bc\cdot 1]K_b+[cc\cdot 1]K_c+(w_3\cdot 1)&=0, \end{aligned}\right\} \qquad (302)$$

astfel încît ecuațiile corecțiilor sînt

$$\left.\begin{aligned} V_1&=a_1K_a+b_1K_b+c_1K_c\\ V_2&=a_2K_a+b_2K_b+c_2K_c\\ V_3&=a_3K_a+b_3K_b+c_3K_c\\ V_4&=a_4K_a+b_4K_b+c_4K_c. \end{aligned}\right\} \qquad (303)$$

Ideea compensării parțiale, pe grupe, se tratează mai clar dacă pornim de la ipoteza că, dintr-un motiv oarecare impus de practică, este necesar să tratăm deocamdată *o singură* ecuație de condiție, de exemplu *prima* ecuație (300).

Scanned with OKEN Scanner

Atunci, această ecuație ne va da pentru o singură corelată o singură ecuație normală, pe care o scriem sub forma

$$[aa]K_1+w_1=0,$$

de unde

$$K_1=-\frac{1}{[aa]}w_1,$$

astfel încît corecțiile corespunzătoare, pe care le însemnăm cu u_i, spre deosebire de V_i, sînt după (303)

$$u_1=-\frac{a_1}{[aa]}w_1,\ u_2=-\frac{a_2}{[aa]}w_2,\ u_3=-\frac{a_3}{[aa]}w_3,\ u_4=-\frac{a_4}{[aa]}w_4. \quad (304)$$

Să introducem noi corecții v_i care să completeze primele corecții u_i spre a le egala cu corecțiile V_i

$$V_1=u_1+v_1,\ V_2=u_2+v_2,\ V_3=u_3+v_3,\ V_4=u_4+v_4. \quad (305)$$

Introducînd valorile (304) și (305) în ecuațiile inițiale de condiție (300), rezultă noi ecuații de condiție care se referă numai la v_i

$$\left.\begin{aligned} &a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+a_4v_4+0=0\\ &b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+c_4v_4+(w_2\cdot 1)=0\\ &c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+c_4v_4+(w_3\cdot 1)=0. \end{aligned}\right\} \quad (306)$$

După formulele (145) și (304) deducem

$$(w_2\cdot 1)=w_2-\frac{[ab]}{[aa]}w_1,\ (w_3\cdot 1)=w_3-\frac{[ac]}{[aa]}w_1, \quad (307)$$

care sînt identice cu termenii liberi din ecuațiile (302).

Tratarea sistemului (306) ne conduce la următoarele ecuații ale corelatelor

$$\left.\begin{aligned} &[aa]K_1'+[ab]K_b+[ac]K_c+0=0\\ &[ab]K_1'+[bb]K_b+[bc]K_c+(w_2\cdot 1)=0\\ &[ac]K_1'+[bc]K_b+[cc]K_c+(w_3\cdot 1)=0\\ &[bb\cdot 1]K_b+[bc\cdot 1]K_c+(w_2\cdot 1)=0\\ &[bc\cdot 1]K_b+[cc\cdot 1]K_c+(w_3\cdot 1)=0, \end{aligned}\right\} \quad (308)$$

unde K_b și K_c sînt aceleași corelate ca și în (301), pe cînd K_1' diferă de K_1 și de K_a. Mai departe, din (306), deducem

$$v_1=a_1K_1'+b_1K_b+c_1K_c, \quad (309)$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît după (305) şi (304)

$$V_1 = u_1 + v_1 = a_1\left(K_1' - \frac{w_1}{[aa]}\right) + b_1 K_b + c_1 K_c. \qquad (310)$$

Dar, comparînd (301) cu (308) rezultă

$$[aa]K_a + w_1 = [aa]K_1',$$

astfel încît (310) devine

$$V_1 = a_1 K_a + b_1 K_b + c_1 K_c,$$

în concordanţă cu (303). La acelaşi rezultat ajungem dacă calculăm celelalte mărimi V_2, V_3, V_4, astfel încît putem enunţa următoarea *teoremă:* dacă se compensează una dintre ecuaţiile de condiţie deducîndu-se o primă compensare, iar apoi valorile observate compensate prima oară se compensează încă o dată — ca şi cum ar fi măsurători originale — în raport cu toate ecuaţiile de condiţie dintr-odată, se ajunge la acelaşi rezultat ca şi cum s-ar fi tratat toate ecuaţiile iniţiale într-o singură operaţie de compensare.

Procedeul se poate generaliza; se compensează mai întîi o grupă de mai multe ecuaţii de condiţie dintre cele date iniţial; se introduc corecţiile astfel obţinute în toate ecuaţiile şi se obţin noi discordanţe; se extrage apoi o nouă grupă adăugîndu-se noile corecţii la primele. Procedeul se repetă pînă ce dispar toate discordanţele din ecuaţiile de condiţie.

§ 136. Ecuaţii de condiţie reduse

Observăm că ecuaţiile de condiţie pot fi transformate în diverse moduri, alcătuind noi ecuaţii mai convenabile, bineînţeles sub restricţia ca să se păstreze numărul lor şi proprietatea de a fi independente între ele, ceea ce nu este permis să se facă cu ecuaţiile erorilor. Folosind această proprietate, să înmulţim prima ecuaţie (300) cu $-\frac{[ab]}{[aa]}$ şi apoi cu $-\frac{[ac]}{[aa]}$, adunînd primul rezultat cu a doua ecuaţie (300), iar al doilea rezultat cu a treia ecuaţie (300). Ecuaţiile de condiţie rezultate devin

$$\left.\begin{aligned} &a_1V_1 + a_2V_2 + a_3V_3 + a_4V_4 + w_1 = 0\\ &b_1'V_1 + b_2'V_2 + b_3'V_3 + b_4'V_4 + (w_2 \cdot 1) = 0\\ &c_1'V_1 + c_2'V_2 + c_3'V_3 + c_4'V_4 + (w_3 \cdot 2) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (311)$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\left.\begin{aligned} b'=b-\frac{[ab]}{[aa]}a, \qquad & c'=c-\frac{[ac]}{[aa]}a, \\ (w_2\cdot 1)=w_2-\frac{[ab]}{[aa]}w_1, \quad & (w_3\cdot 1)=w_3-\frac{[ac]}{[aa]}w_1, \\ [ab']=0, \qquad & [ac']=0. \end{aligned}\right\} \tag{312}$$

Din sistemul (311) formăm ecuaţiile normale, ţinînd seama de relaţiile (312)

$$\begin{aligned} &[aa]K_a+\ldots\ldots\ldots+w_1=0 \\ &\ldots\ [b'b']K_b+[b'c']K_c+(w_2\cdot 1)=0 \\ &\ldots\ [b'c']K_b+[c'c']K_c+(w_3\cdot 2)=0 \end{aligned}$$

sau

$$\left.\begin{aligned} &[aa]K_a+\ldots\ldots\ldots+w_1=0 \\ &\ldots\ [bb\cdot 1]K_b+[bc\cdot 1]K_c+(w_2\cdot 1)=0 \\ &\ldots\ [bc\cdot 1]K_b+[cc\cdot 1]K_c+(w_3\cdot 1)=0. \end{aligned}\right\} \tag{313}$$

Din sistemul (313) rezultă că valoarea lui K_a este independentă de K_b şi K_c; prin urmare, putem descompune corecţiile V_i în două părţi

$$\begin{aligned} u_1&=a_1K_a, & v_1&=b_1'K_b+c_1'K_c, & V_1&=u_1+v_1, \\ u_2&=a_2K_a, & v_2&=b_2'K_b+c_2'K_c, & V_2&=u_2+v_2, \\ u_3&=a_3K_a, & v_3&=b_3'K_b+c_3'K_c, & V_3&=u_3+v_3, \\ u_4&=a_4K_a, & v_4&=b_4'K_b+c_4'K_c, & V_4&=u_4+v_4. \end{aligned}$$

Putem astfel aplica teorema compensării parţiale, compensînd mai întîi prima ecuaţie separat şi apoi pe celelalte împreună.

Putem totuşi aplica acelaşi procedeu, mai departe, reducînd la fel şi a treia ecuaţie (311). Obţinem sistemul

$$\begin{aligned} &a_1V_1+a_2V_2+a_3V_3+a_4V_4+w_1=0 \\ &b_1'V_1+b_2'V_2+b_3'V_3+b_4'V_4+(w_2\cdot 1)=0 \\ &c_1''V_1+c_2''V_2+c_3''V_3+c_4''V_4+(w_3\cdot 2)=0, \end{aligned}$$

unde

$$c''=c'-\frac{[b'c']}{[b'b']}b', \quad (w_3\cdot 2)=(w_3\cdot 1)-\frac{[b'c']}{[b'b']}(w_2\cdot 1).$$

Rezultă, după cum se verifică uşor,

$$[ab']=0, \quad [b'c'']=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Se obţin astfel următoarele ecuaţii normale

$$\begin{aligned}[aa]K_a+w_1&=0\\ [b'b']K_b+(w_2\cdot 1)&=0\\ [c''c'']K_c+(w_3\cdot 2)&=0\end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned}[aa]K_a+w_1&=0\\ [bb\cdot 1]K_a+(w_2\cdot 1)&=0\\ [cc\cdot 2]K_c+(w_3\cdot 2)&=0.\end{aligned}$$

Cele trei ecuaţii (317) sînt complet independente între ele şi, compensate separat, ne dau acelaşi rezultat ca şi cum am fi operat compensarea simultană a ecuaţiilor iniţiale.

§ 137. Compensări pe două grupe, cu ecuaţii de condiţie transformate. Metoda Krüger

Proprietatea ecuaţiilor de condiţie de a putea fi tratate separat dă posibilitatea de a aplica metoda compensărilor parţiale într-un caz deosebit de important şi anume, în compensarea unei reţele de triunghiuri, unde se pot compensa ecuaţiile unghiurilor separat de ecuaţiile laterale şi de constrîngere.

În vederea expunerii şi aplicării metodei Krüger-Urmaev, să considerăm sistemul ecuaţiilor de condiţie, descompus în două grupe, pentru n *corecţii* $v_1, v_2, \ldots, v_n$

$$\left.\begin{aligned}a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_a&=0\\ b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_b&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ l_1v_1+l_2v_2+\cdots+l_nv_n+w_l&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(314,\text{I})$$

care formează grupa I compusă din $l<n$ ecuaţii de condiţie, şi

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots+\alpha_nv_n+w_\alpha&=0\\ \beta_1v_1+\beta_2v_2+\cdots+\beta_nv_n+w_\beta&=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ \lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\cdots+\lambda_nv_n+w_\lambda&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(314,\text{II})$$

Scanned with OKEN Scanner

care formează grupa a II-a, compusă din $\lambda < n$ ecuații de condiție, cu $l \leq \lambda$. După metoda expusă la § 129, ecuațiile normale ale corelatelor corespunzătoare sistemului (314) se exprimă sub forma

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]K_a+[ab]K_b+\cdots+[al]K_l+[a\alpha]K_\alpha+[a\beta]K_\beta+\cdots+[a\lambda]K_\lambda+w_a=0\\
&[ab]K_a+[bb]K_b+\cdots+[bl]K_l+[b\alpha]K_\alpha+[b\beta]K_\beta+\cdots+[b\lambda]K_\lambda+w_b=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[al]K_a+[bl]K_b+\cdots+[ll]K_l+[l\alpha]K_\alpha+[l\beta]K_\beta+\cdots+[l\lambda]K_\lambda+w_l=0,
\end{aligned}\right\} \quad (315,\text{I})$$

$$\left.\begin{aligned}
&[a\alpha]K_a+[b\alpha]K_b+\cdots+[l\alpha]K_l+[\alpha\alpha]K_\alpha+[\alpha\beta]K_\beta+\cdots+[\alpha\lambda]K_\lambda+w_\alpha=0\\
&[a\beta]K_a+[b\beta]K_b+\cdots+[l\beta]K_l+[\alpha\beta]K_\alpha+[\beta\beta]K_\beta+\cdots+[\beta\lambda]K_\lambda+w_\beta=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[a\lambda]K_a+[b\lambda]K_b+\cdots+[l\lambda]K_l+[\alpha\lambda]K_\alpha+[\beta\lambda]K_\beta+\cdots+[\lambda\lambda]K_\lambda+w_\lambda=0.
\end{aligned}\right\} \quad (315,\text{II})$$

Valorile erorilor v_i exprimate cu ajutorul corelatelor obținute prin rezolvarea ecuațiilor (319) sînt date, după cum știm (§ 129), de expresiile

$$v_i=a_iK_a+b_iK_b+\cdots+l_iK_l+\alpha_iK_\alpha+\beta_iK_\beta+\cdots+\lambda_iK_\lambda \quad (i=1,2,\cdots,n), \quad (316)$$

Este evident că compensarea separată pe grupe nu dă același rezultat ca în cazul rezolvării în bloc a ecuațiilor de condiție. De aceea, lăsînd neschimbate ecuațiile din grupa I, trebuie să transformăm ecuațiile din grupa a II-a, astfel încît sistemul II transformat să rămînă echivalent cu sistemul (314,II) inițial, transformarea efectuîndu-se sub condiția ca ecuațiile astfel transformate să fie independente de prima grupă de ecuații (314,I), cele două grupe putînd fi compensate separat. Metoda folosită este metoda coeficienților nedeterminați și anume, înmulțim ecuațiile grupei I respectiv cu $\rho_{1a}, \rho_{1b}, \cdots, \rho_{1l}$ și le adunăm cu prima ecuație din grupa a II-a; apoi, înmulțim ecuațiile grupei I cu $\rho_{2a}, \rho_{2b}, \cdots, \rho_{2l}$ și le adunăm cu a doua ecuație din grupa a II-a etc.

În acest mod obținem sistemul de λ ecuații transformate, echivalent cu sistemul (314,II), întrucît parametrii nedeterminați sînt, deocamdată, complet arbitrari. Îi vom determina mai jos, cu condiția ca sistemul astfel obținut să fie și independent de sistemul (314,I). Rezultă

$$\left.\begin{aligned}
&A_1v_1+A_2v_2+\cdots+A_nv_n+W_A=0\\
&B_1v_1+B_2v_2+\cdots+B_nv_n+W_B=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_1v_1+L_2v_2+\cdots+L_nv_n+W_L=0,
\end{aligned}\right\} \quad (317)$$

unde

$$\left.\begin{aligned} A_i &= \alpha_i + a_i\rho_{1a} + b_i\rho_{1b} + \cdots + l_i\rho_{1l} \\ B_i &= \beta_i + a_i\rho_{2a} + b_i\rho_{2b} + \cdots + l_i\rho_{2l} \quad (i = 1,2,\cdots n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ L_i &= \lambda_i + a_i\rho_{\lambda a} + b_i\rho_{\lambda b} + \cdots + l_i\rho_{\lambda l}, \end{aligned}\right\} \qquad (317')$$

$$\left.\begin{aligned} W_A &= w_a + w_a\rho_{1a} + w_b\rho_{1b} + \cdots + w_l\rho_{1l} \\ W_B &= w_\beta + w_a\rho_{2a} + w_b\rho_{2b} + \cdots + w_l\rho_{2l} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_L &= w_\lambda + w_a\rho_{\lambda a} + w_b\rho_{\lambda b} + \cdots + w_l\rho_{\lambda l}. \end{aligned}\right\} \qquad (317'')$$

Condiția ca sistemul de ecuații transformate (317) să fie independent de ecuațiile sistemului (314,I) ne conduce — după teoria formelor liniare — la egalitățile

$$\left.\begin{aligned} [aA] = [bA] = \cdots = [lA] = 0 \\ [aB] = [bB] = \cdots = [lB] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [aL] = [bL] = \cdots = [lL] = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (318)$$

În adevăr, să luăm de exemplu prima ecuație din grupa (314,I) și prima ecuație din sistemul (317). Dacă aceste două ecuații sînt liniar dependente între ele, coeficienții lor trebue să fie proporționali, astfel încît să avem

$$K = \frac{A_1}{a_1} = \frac{A_2}{a_2} = \cdots = \frac{A_n}{a_n} = \frac{[aA]}{[aa]},$$

după proprietățile șirului de rapoarte egale, astfel încît șirul acestor rapoarte este egal cu un număr $K \neq 0$. Pentru ca cele două ecuații să fie independente, este necesar și suficient să avem $K = 0$; dar atunci, cum $[aa]$ este diferit de zero și de infinit, rezultă condiția $[aA] = 0$, ceea ce constituie prima condiție (318); celelalte relații (318) se stabilesc în mod analog.

Coeficienții nedeterminați $\rho_{ia}, \rho_{ib}, \cdots, \rho_{il}$ $(i = 1, 2, \ldots, \lambda)$, numiți și corelate auxiliare, în număr de $l \cdot \lambda$, se determină înlocuind valorile (317) în relațiile (318); se obține sistemul de $l \cdot \lambda$ ecuații pentru cele $l \cdot \lambda$ necunoscute ρ

$$\left.\begin{aligned} [aa]\rho_{1a} + [ab]\rho_{1b} + \cdots + [al]\rho_{1l} + [a\alpha] = 0 \\ [ab]\rho_{1a} + [bb]\rho_{1b} + \cdots + [bl]\rho_{1l} + [b\alpha] = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ [al]\rho_{1a} + [bl]\rho_{1b} + \cdots + [ll]\rho_{1l} + [l\alpha] = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (319.1)$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\rho_{2a}+[ab]\rho_{2b}+\cdots+[al]\rho_{2l}+[a\beta]=0\\
&[ab]\rho_{2a}+[bb]\rho_{2b}+\cdots+[bl]\rho_{2l}+[b\beta]=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[al]\rho_{2a}+[bl]\rho_{2b}+\cdots+[ll]\rho_{2l}+[l\beta]=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (319.2)$$

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]\rho_{\lambda a}+[ab]\rho_{\lambda b}+\cdots+[al]\rho_{\lambda l}+[a\lambda]=0\\
&[ab]\rho_{\lambda a}+[bb]\rho_{\lambda b}+\cdots+[bl]\rho_{\lambda l}+[b\lambda]=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&[bl]\rho_{\lambda a}+[[bl]\rho_{\lambda b}+\cdots+[ll]\rho_{\lambda l}+[l\lambda]=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (319.\lambda)$$

Observăm că sistemele (319) ale corelatelor auxiliare au aceeaşi structură ca şi sistemul ecuaţiilor normale ale corelatelor grupei I (315, 1). cu singura deosebire că în locul termenilor liberi w_a, w_b, $\cdots$, w_l se introduc succesiv sumele $[a\alpha]$, $[b\alpha]$, $\cdots$, $[l\alpha]$, respectiv $[a\beta]$, $[b\beta]$, $\cdots$, $[l\beta]$; $[a\lambda]$, $[b\lambda]$, $\cdots$, $[l\lambda]$, astfel încît pentru rezolvarea sistemelor (319) se va utiliza aceeaşi schemă ca şi pentru sistemul de corelate (315,I).

O dată determinate valorile corelatelor auxiliare ρ, rezultă valorile coeficienţilor (317') şi (317''), astfel încît sistemul transformat (317) se poate scrie explicit. În acest mod, în locul sistemului iniţial de două grupe (314,I) şi (314,II) se poate considera sistemul de două grupe independente între ele, compensarea putîndu-se efectua separat. Dar, pentru ca rezultatul total astfel obţinut să fie identic cu cel obţinut prin compensare simultană, va trebui să mai arătăm că este satisfăcută relaţia de activitate a condiţiei de compensare: $[vv]=[v'v']+[v''v'']=$ minim, unde v_i sînt corecţiile rezultate din considerarea primei grupe, iar v_i'' corecţiile rezultate din considerarea grupei a II-a transformată.

În aceste condiţii, sistemul (314) se înlocuieşte prin sistemul echivalent de $(l+\lambda)$ ecuaţii independente

$$\left.\begin{aligned}
&a_1v_1+a_2v_2+\cdots+a_nv_n+w_a=0\\
&b_1v_1+b_2v_2+\cdots+b_nv_n+w_b=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&l_1v_2+l_2v_2+\cdots+l_nv_n+w_l=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (314'.\text{I})$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_1v_1+A_2v_2+\cdots+A_nv_n+W_A=0\\
&B_1v_1+B_2v_2+\cdots+B_nv_n+W_B=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L_1v_1+L_2v_2+\cdots+L_nv_n+W_L=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (314'.\text{II})$$

Scanned with OKEN Scanner

Trebuie observat că independența celor două grupe de ecuații permite rezolvarea lor independentă, după cum se va vedea din sistemul de corelate care se desface în două sisteme de variabile distincte. După cum vom vedea, soluția totală este identică soluției globale.

Ecuațiile normale ale corelatelor pentru acest sistem sînt

$$\begin{array}{l|l|l}
[aa]K'_a+[ab]K'_b+\cdots+[al]K & +[aA]K'_A+[aB]K'_B+\cdots+[aL]K'_L & +w_a=0\\
[ab]K'_a+[bb]K'_b+\cdots+[bl]K & +[bA]K'_A+[bB]K'_B+\cdots+[bL]K'_L & +w_b=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\
[al]K'_a+[bl]K'_b+\cdots+[ll]K'_l & +[lA]K'_A+[lB]K'_B+\cdots+[lL]K'_L & +w_l=0,\\
\hline
[aA]K'_a+[bA]K'_b+\cdots+[lA]K'_l & +[AA]K'_A+[AB]K'_B+\cdots+[AL]K'_L & +W_A=0\\
[aB]K'_a+[bB]K'_b+\cdots+[lB]K'_l & +[AB]K'_A+[BB]K'_B+\cdots+[BL]K'_L & +W_B=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\\
[aL]K'_a+[bL]K'_b+\cdots+[lL]K'_l & +[AL]K'_A+[BL]K'_B+\cdots+[LL]K'_L & +W_L=0.
\end{array}\qquad (315')$$

Rezolvarea globală a acestui sistem de corelate (315′), care înlocuiește sistemul scris anterior (315), este deosebit de dificilă. Dar, după cum am observat, condiția de independență (318) a celor două grupe care figurează în (314′) ne arată că termenii încadrați din sistemul (315′) dispar, astfel încît sistemul (315′) se reduce de fapt, în acest mod, la două sisteme distincte, mult mai simple, care pot fi rezolvate separat

$$\left.\begin{array}{l}
[aa]K'_a+[ab]K'_b+\cdots+[al]K'_l+w_a=0\\
[ab]K'_a+[bb]K_b+\cdots+[bl]K'_l+w_b=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[al]K'_a+[bl]K'_b+\cdots+[ll]K'_l+w_l=0,
\end{array}\right\}\qquad (315'')$$

pentru corelatele $K'_a,\ K'_b,\ \cdots,\ K'_l$, și

$$\left.\begin{array}{l}
[AA]K'_A+[AB]K'_B+\cdots+[AL]K'_L+W_A=0\\
[AB]K'_A+[BB]K'_B+\cdots+[BL]K'_L+W_B=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
[AL]K'_A+[BL]K'_B+\cdots+[LL]K'_L+W_L=0,
\end{array}\right\}\qquad (315''')$$

pentru corelatele $K'_A,\ K'_B,\ \cdots,\ K'_L$.

Rămîne să mai verificăm satisfacerea condiției de minim. După formula generală (§ 129), avem pentru compensarea primei grupe (314′,I), după rezolvarea sistemului normal de corelate corespunzător (315″),

$$v'_i=a_iK'_a+b_iK'_b+\cdots+l_iK'_l\quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n),\qquad (320')$$

iar după compensarea grupei a II-a transformată (314′.II), prin rezolvarea sistemului de corelate corespunzător (315‴), obținem

$$v_i''=A_iK_A'+B_iK_B'+\cdots+L_iK_L' \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n). \qquad (320'')$$

Scriind $v_i=v_i'+v_i''$, trebuie să observăm mai întîi că expresia astfel dedusă

$$\begin{aligned} v_i=a_iK_a'+b_iK_b'+\cdots+l_iK_l'+\\ +A_iK_A'+B_iK_B'+\cdots+L_iK_L' \quad (i=1,\ 2,\cdots,\ n) \end{aligned} \qquad (321)$$

este identică cu expresia (316), ceea ce rezultă din faptul că, sistemul (314′) fiind echivalent cu sistemul (314), sistemele normale ale corelatelor (315) și (315″), (315‴) vor fi și ele echivalente, deci au aceleași soluții pentru corelate și pentru corecții. Pentru verificarea relației de compensare

$$[vv]=[v'v']+[v''v'']=\text{minim} \qquad (322)$$

formăm expresiile corespunzătoare ridicînd la pătrat expresia (321); obținem

$$\begin{aligned} v_i^2=(a_iK_a'+b_iK_b'+\cdots+l_iK_l')^2+(A_iK_A'+B_iK_B'+\cdots+L_iK_L'+\\ +2(a_iA_iK_a'K_A'+b_iA_iK_b'K_A'+\cdots+l_iA_iK_l'K_A')+\\ +2(a_iB_iK_a'K_B'+b_iB_iK_b'K_B'+\cdots+l_iB_iK_l'K_B')+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +2(a_iL_iK_a'K_L'+b_iL_iK_b'K_L'+\cdots+l_iL_iK_l'K_L'), \end{aligned}$$

de unde, sumînd pentru toți $i=1, 2, \ldots, n$, rezultă, avînd în vedere (320′) și (320″),

$$\begin{aligned} [vv]=[v'v']+[v''v'']+2([aA]K_a'K_A'+[bA]K_b'K_A'+\cdots+[lA]K_l'K_A')+\\ +2([aB]K_a'K_B'+[bB[K_b'K_B'+\cdots+[lB]K_l'K_B')+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ +2([aL]K_a'K_L'+[bL]K_b'K_L'+\cdots+[lL]K_l'K_L'). \end{aligned}$$

Dar, după relațiile de independență (318), se vede că termenii din parantezele rotunde dispar, astfel încît relația de compensare (322) este satisfăcută, deoarece compensările parțiale pe grupe s-au făcut sub condițiile de minim $[v'v']=\text{minim}$ și $[v''v'']=\text{minim}$, ambele expresii fiind mărimi esențial pozitive.

După formula (239) de la § 131, rezultă că eroarea medie pătratică m de compensare a grupei I și a grupei a II-a este

$$m=\pm\sqrt{\frac{[v'v']}{l}}, \qquad m=\pm\sqrt{\frac{[v''v'']}{\lambda}}.$$

Deducem

$$m^2l=[v'v']; \qquad m^2\lambda=[v''v''],$$

Scanned with OKEN Scanner

aşadar

$$m^2(l+\lambda)=[v'v']+[v''v''],$$

iar, după (322)

$$m^2(l+\lambda)=[vv];$$

prin urmare, eroarea medie pătratică a compensării este

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{l+\lambda}}, \qquad (323)$$

deci aceeaşi ca pentru compensarea globală cu $l+\lambda$ ecuaţii de condiţie, ca şi cum compensarea s-ar fi executat simultan.

Din expunerea precedentă se deduce ordinea calculelor:

1. Se formează ecuaţiile de condiţie ale grupei I şi ale grupei a II-a netransformată (314).
2. Se compensează grupa I (314′) şi se calculează primele corecţii v_i (320′).
3. Se calculează corelatele auxiliare ρ [ecuaţiile (319)].
4. Se calculează coeficienţii (317′) şi termenii liberi (317″) ai ecuaţiilor transformate ale grupei a II-a (317).
5. Se compensează grupa a II-a transformată (317) şi se calculează corecţiile v_i'' (320″).
6. Se calculează corecţiile totale (321).
7. Se face verificarea relaţiei de compensare (322).

Se mai pune încă chestiunea: în ce condiţii practice tehnica de calcul prezintă avantaje relative la economia de muncă şi de timp? Am observat că rezolvarea ecuaţiilor normale pentru grupa I (314, I) şi calculul corelatelor auxiliare (319) conduce la operaţii aproape identice, sistemele diferind între ele numai prin termenii liberi din ecuaţii. De aceea, rezolvarea lor după schema lui Gauss se poate face pe o singură tabelă, în care trebuie introduse coloane pentru termenii liberi şi pentru termenii de control în număr egal cu numărul sistemelor de ecuaţii necesare calculelor corelatelor auxiliare şi egal cu numărul ecuaţiilor din grupa a II-a.

Din această observaţie rezultă că pentru uşurarea calculelor este necesar să alegem în grupa I acele ecuaţii de condiţie ale căror ecuaţii normale se rezolvă mai uşor.

§ 138. Aplicaţie în geodezie (Urmaev)

Metoda — în condiţiile de rapiditate a calculelor — este utilă mai ales în problemele triangulaţiei de ordinul al doilea şi al treilea, unde punctele sînt mult mai numeroase decît în ordinul întîi, iar

Scanned with OKEN Scanner

precizia mai mică. Rezultă că metodele de simplificare a compensării sînt, în special, căutate la prelucrarea triangulației de ordinul al doilea și al treilea. Dar și în această problemă grupa de ecuații care duce la sistemul cel mai simplu de corelate pe care trebuie să-l luăm ca grupa I este format din ecuațiile de unghiuri din triunghiuri nesuprapuse.

Să presupunem așadar că avem o rețea sau un lanț de triunghiuri, în care unghiurile se numerotează succesiv prin (1, 2, 3), (4, 5, 6), ..., $(i-1,\ i,\ i+1)$ în ordinea triunghiurilor. Se aleg în grupa I numai ecuațiile de unghiuri pentru triunghiurile nesuprapuse, după cum am specificat. Restul ecuațiilor de condiție care pot fi datorite ecuațiilor de unghiuri din triunghiuri suprapuse, ecuații de tur de orizont, ecuații de laturi, de baze etc., vor constitui grupa a II-a netransformată.

În aceste condiții, coeficienții ecuațiilor de unghiuri care formează grupa I sînt egali cu zero sau cu unu

$a_1=a_2=a_3=+1,\ a_4=a_5=\cdots=a_n=0$, din primul triunghi;
$b_1=b_2=b_3=0,\ b_4=b_5=b_6=+1,\ b_7=b_8=\cdots=b_n=0$, din al doilea triunghi;
. . . . . .
$l_1=l_2=\cdots=l_{n-3}=0,\ l_{n-2}=l_{n-1}=l_n=+1$, din al n-lea triunghi.

Cu aceste valori, coeficienții ecuațiilor normale ale corelatelor pentru grupa I devin

$$[aa]=[bb]=\cdots=[ll]=+3,$$

ceilalți coeficienți dreptunghiulari fiind nuli. Ecuațiile normale ale corelatelor grupei I se reduc astfel la sistemul foarte simplu

$$3K_a+w_a=0,\quad 3K_b+w_b=0,\ \ldots,\ 3K_l+w_l=0,$$

de unde rezultă valorile corelatelor

$$K_a=-\frac{1}{3}w_a,\quad K_b=-\frac{1}{3}w_b,\ \ldots,\ K_l=-\frac{1}{3}w_l. \tag{324}$$

Cu aceste valori, formulele (320′) ne dau pentru corecțiile primei grupe

$$\left.\begin{array}{lll} v_1'=-\frac{1}{3}w_a, & v_2'=-\frac{1}{3}w_a, & v_3'=-\frac{1}{3}w_a, \\ v_4'=-\frac{1}{3}w_b, & v_5'=-\frac{1}{3}w_b, & v_6'=-\frac{1}{3}w_b, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ v_{n-2}'=-\frac{1}{3}w_l, & v_{n-1}'=-\frac{1}{3}w_l, & v_n'=-\frac{1}{3}w_l. \end{array}\right\} \tag{325}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pentru fiecare triunghi eroarea de închidere w se va împărţi la 3 spre a se afla corecţia (cu semn schimbat).

Pe de altă parte, cu valorile precedente ale coeficienţilor $a, b, \ldots, l$ avem

$$\left.\begin{aligned} [a\alpha] &= \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \quad [a\beta] = \beta_1+\beta_2+\beta_3, \ldots \\ [b\alpha] &= \alpha_4+\alpha_5+\alpha_6, \quad [b\beta] = \beta_4+\beta_5+\beta_6, \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [l\alpha] &= \alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n, \quad [l\beta] = \beta_{n-2}+\beta_{n-1}+\beta_n, \ldots \end{aligned}\right\} \quad (326)$$

Cu aceste valori, ecuaţiile corelatelor auxiliare (319) ne dau

$$\left.\begin{aligned} \rho_{1a} &= -\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \quad \rho_{2a} = -\frac{1}{3}(\beta_1+\beta_2+\beta_3), \ldots \\ \rho_{1b} &= -\frac{1}{3}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6), \quad \rho_{2b} = -\frac{1}{3}(\beta_4+\beta_5+\beta_6), \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_{1l} &= -\frac{1}{3}(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n), \quad \rho_{2l} = -\frac{1}{3}(\beta_{n-2}+\beta_{n-1}+\beta_n), \ldots \end{aligned}\right\} \quad (327)$$

De asemenea, formulele care dau coeficienţii nedeterminaţi (317′) devin

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \alpha_1+\rho_{1a} = \alpha_1-\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \\ A_2 &= \alpha_2+\rho_{1a} = \alpha_2-\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3), \\ A_3 &= \alpha_3+\rho_{1a} = \alpha_3-\frac{1}{3}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3); \\ A_4 &= \alpha_4+\rho_{1b} = \alpha_4-\frac{1}{3}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6), \\ A_5 &= \alpha_5+\rho_{1b} = \alpha_5-\frac{1}{3}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6), \\ A_6 &= \alpha_6+\rho_{1b} = \alpha_6-\frac{1}{3}(\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-2} &= \alpha_{n-2}+\rho_{1l} = \alpha_{n-2}-\frac{1}{3}(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n) \\ A_{n-1} &= \alpha_{n-1}+\rho_{1l} = \alpha_{n-1}-\frac{1}{3}(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n), \\ A_n &= \alpha_n+\rho_{1l} = \alpha_n-\frac{1}{3}(\alpha_{n-2}+\alpha_{n-1}+\alpha_n) \end{aligned}\right\} \quad (328)$$

şi în mod analog se calculează ceilalţi coeficienţi $B, C, \ldots, L$ ai ecuaţiilor grupei a II-a transformată.

Scanned with OKEN Scanner

Ca relaţii de control se observă că din expresiile precedente trebuie să avem

$$A_1+A_2+A_3=0, \qquad A_4+A_5+A_6=0, \ldots, A_{n-2}+A_{n-1}+A_n=0$$

şi în mod analog pentru ceilalţi coeficienţi.

Pentru simplificarea şi transformarea termenilor liberi ai grupei a II-a (317") se poate proceda în modul următor: ecuaţiile de condiţie ale grupei a II-a netransformată (314, II) se formează cu ajutorul unghiurilor corectate cu primele corecţii. Numai termenii liberi se modifică astfel.

Pentru problema triangulaţiei expusă mai sus se procedează practic precum urmează:

1. Se formează ecuaţiile de unghiuri pentru triunghiurile nesuprapuse ale reţelei, cu care formăm grupa I. Se calculează primele corecţii prin împărţire la 3 a termenului liber, luat cu semn schimbat.

2. Se corectează unghiurile măsurate cu primele corecţii. Cu ajutorul unghiurilor astfel corectate se formează restul ecuaţiilor de condiţie care urmează a forma grupa a II-a netransformată.

3. Se calculează coeficienţii grupei a II-a transformată după cum urmează. Se formează grupe de cîte trei coeficienţi ai ecuaţiei respective, din grupa a II-a netransformată, corespunzător unghiurilor triunghiului respectiv, şi se determină media lor aritmetică. Se calculează apoi coeficientul transformat, făcîndu-se diferenţa dintre coeficientul netransformat şi media aritmetică calculată anterior.

Vom aplica aceste concluzii la un calcul numeric.

Exemplu numeric. Se dau în planul proiecţiei Gauss lungimile laturilor $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ şi unghiurile ABC şi BCD (fig. 16). Se cere să se compenseze pe unghiuri punctele a, b, c încadrate de laturile date AB, BC, CD, prin metoda Krüger-Urmaev.

Date:

$$\lg \overline{AB}=4{,}103695,$$
$$\lg \overline{BC}=4{,}129520, \qquad \widehat{ABC}=131°38'11",4$$
$$\lg \overline{CD}=4{,}160559, \qquad \widehat{BCD}=144°36'24",1.$$

După dezvoltările de la §·127, formula (193), numărul total al ecuaţiilor de condiţie este $r=U-2p+4$ pentru reţeaua liberă, unde U este numărul unghiurilor reţelei, iar p numărul punctelor de staţie. Apoi, expresiile (200) ne dau numărul ecuaţiilor de unghiuri $r_1=1+(l-l')-p+p'$, unde l este numărul laturilor vizate dus şi întors, l' numărul laturilor vizate numai într-un sens şi p' numărul punctelor de întretăiere (nestaţionare). Tot expresiile (200) ne

Scanned with OKEN Scanner

Nr. triunghiurilor	Nr. unghiurilor	Denumirea vîrfurilor Termenul liber	Unghiuri măsurate (reduse în plan)	Prima corecție v_i'
1	2	3	4	5
I	1	b	79°50'18",2	+0",5
	2	B	44 54 02,5	+0,6
	3	C	55 15 37,6	+0,6
		w=—1",7	179 59 58,3	+1,7
II	4	a	43 32 04,8	—1,0
	5	B	40 53 29,4	—1,0
	6+7	b	95 34 29,7	—1,9
		w=+3",9	180 00 03,9	—3,9
III	8+9	A	83 16 53,7	+2,6
	10	B	45 50 36,3	+1,3
	11	a	50 52 24,8	+1,3
		w=—5",2	179 59 54,8	+5,2
IV**	6	b	50 17 34,3	—0,9
	9	A	42 58 15,0	+1,3
	10+5	B	86 44 05,7	+0,3
		w=—5",0	179 59 55,0	+0,7
V**	4+11	a	94 24 29,6	+0,3
	7	b	45 16 55,4	—1,0
	8	A	40 18 38,7	+1,3
		w=+3",7	180 00 03,7	+0,6
I'	12	c	49 30 15,9	+1,2
	13	a	46 10 22,4	+1,2
	14	b	84 19 18,2	+1,1
		w=—3",5	179 59 56,5	+3,5
VII	15	C	41 01 33,7	—0,4
	16	c	38 42 33,7	—0,4
	17	b	100 15 53,9	—0,5
		w=+1",3	180 00 01,3	—1,3
VIII	18	D	68 59 15,9	+0,9
	19	C	48 19 15 4	+0,9
	20	c	62 41 26,0	+0,9
		w=—2",7	179 59 57,3	+2,7

** IV și V sînt triunghiuri suprapuse celorlalte triunghiuri și anume

Scanned with OKEN Scanner

Secundele unghiurilor corectate cu prima corecţie	A doua corecţie	Unghiuri compensate	Logaritmii sinusurilor	Logaritmii laturilor definitive
6	7	8	9	
18",7	—2,6	79°50'16",1	$\bar{1}$,993133	4,129520
03,1	+2,9	44 54 06,0	$\bar{1}$,848738	3,985125
38,2	—0,3	55 15 37,9	$\bar{1}$,914741	4,051128
00,0	0,0	180 00 00,0	4,136387	
03,8	+0,1	43 32 03,9	$\bar{1}$,838087	4,051128
28,4	—1,2	40 53 27,2	$\bar{1}$,815989	4,029030
27,8	+1,2	95 34 29,0	$\bar{1}$,997941	4,210982
00,0	+0,1	180 00 00,1	4,213041	
56,3	+2,5	83 16 58,8	$\bar{1}$,997009	4,210982
37,6	+0,6	45 50 38,2	$\bar{1}$,855789	4,069762
26,1	—3,1	50 52 23,0	$\bar{1}$,889722	4,103695
00,0	0,0	180 00 00,0	4,213973	
33,4	+5,3	50 17 38,7	$\bar{1}$,886115	4,103695
16,3	—0,4	42 58 15,9	$\bar{1}$,833548(7)	4,051128
06,0	—0,6	86 44 05,4	$\bar{1}$,999294	4,216874
55,7	+4,3	180 00 00,0	4,217580	
29,9	—3,1	94 24 26,8	$\bar{1}$,998714	4,216874
54,4	—4,1	45 16 50,3	$\bar{1}$,851602	4,069762
40,0	+2,9	40 18 42,9	$\bar{1}$,810869	4,029029
04,3	—4,3	180 00 00,0	4,218160	
17,1	—2,4	49 30 14,7	$\bar{1}$,881072	4,029029
23,6	+3,3	46 10 26,9	$\bar{1}$,858204	4,006161
19,3	—1,0	84 19 18,3	$\bar{1}$,997864	4,145821
00,0	—0,1	179 59 59,9	4,147957	
33,3	—0,6	41 01 32,7	$\bar{1}$,817168	4,006161
33,3	—2,6	38 42 30,7	$\bar{1}$,796129	3,985122
53,4	+3,2	100 15 56,6	$\bar{1}$,992991	4,181984
00,0	0,0	180 00 00,0	4,188993	
16,8	—3,3	68 59 13,5	$\bar{1}$,970114	4,181984
16,3	—2,8	48 19 13,5	$\bar{1}$,873247	4,085122
26,9	+6,2	62 41 33,1	$\bar{1}$,948685	4,160559(60)
00,0	+0,1	180 00 00,1	4,211875	

lui II şi III

dau numărul ecuațiilor laterale $r_2=l-2p+3$, precum și numărul ecuațiilor de tur de orizont

$$r_3=U+p-p'-2l+l'.$$

Control: $r=r_1+r_2+r_3$.

In problema de față avem $p=7$, $p'=0$, $l=13$, $l'=0$, $U=20$, astfel încît $r=10$, $r_1=7$, $r_2=2$, $r_3=1$. Control: $10=7+2+1$.

În afară de aceste zece ecuații de condiție, pentru rețeaua liberă mai există încă patru ecuații de constrîngere: două ecuații de laturi între AB și BC, respectiv BC și CD, și două ecuații unghiulare pentru unghiurile fixe $\widehat{ABC}$ și $\widehat{BCD}$.

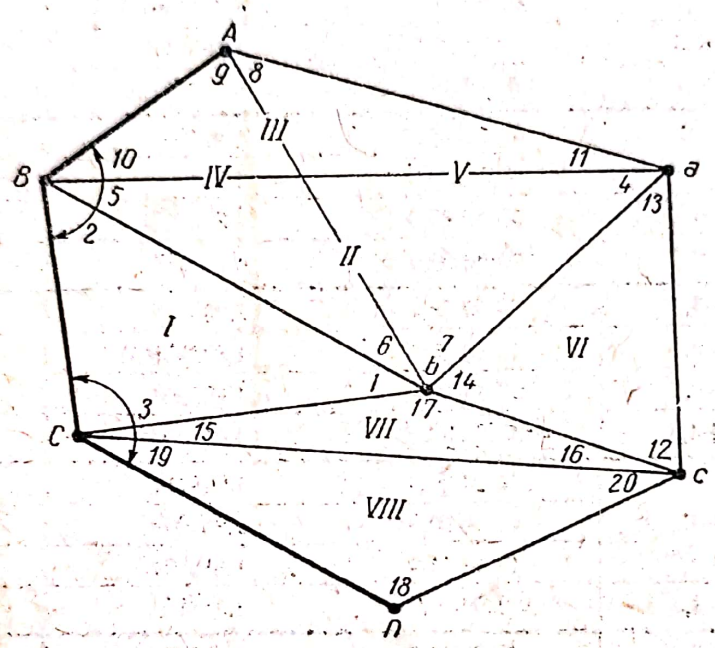


Fig. 16.

In total avem 14 ecuații de condiție, dintre care alegem în prima grupă șase ecuații de unghiuri formate pentru șase triunghiuri nesuprapuse (I, II, III, VI, VII, VIII). Calculul primelor corecții v_i' de compensare a grupei I se face după cum arată tabela 17, unde în coloana a patra se scriu unghiurile măsurate, iar în coloana a treia se scrie termenul liber corespunzător unghiului respectiv. Formulele de calcul sînt cele deduse în paragraful precedent.

Ecuațiile de condiție care alcătuiesc grupa a II-a netransformată se formează cu unghiurile corectate cu primele corecții. Aceste ecuații sînt

1. *Ecuația unghiulară* pentru triunghiul IV suprapus

$$5+6+9+10=179°59'55'',7; \quad w=-4'',3,$$

deci

$$\alpha)\ v_5+v_6+v_9+v_{10}-4'',3=0,$$

2. *Ecuația de tur de orizont*

$$1+6+7+14+17=359°59'59'',2\,;\quad w=-0'',8,$$

deci

$$\beta)\ v_1+v_6+v_7+v_{14}+v_{17}-0'',8=0.$$

3. *Două ecuații de unghi fix*

$$2+5+10=131°38'09'',1 \qquad 3+15+19=144°36'27'',8$$
$$\widehat{ABC}=131°38'11'',4 \qquad \widehat{BCD}=144°36'24'',1$$
$$w=-2'',3 \qquad w=+3'',7$$

deci

$$\gamma)\ v_2+v_5+v_{10}-2'',3=0, \qquad \delta)\ v_3+v_{15}+v_{19}+3'',7=0.$$

4. *Două ecuații laterale*

1. Polul *A*

Numărul unghiului	lg sin	Δ	Numărul unghiului	lg sin	Δ
5	$\bar{1}$,815993	+2,4	4	$\bar{1}$,838087	+2,2
7	$\bar{1}$,851610	+2,1	6	$\bar{1}$,886106	+1,8
9	$\bar{1}$,833549	+2,3	8	$\bar{1}$,810862	+2,5
11	$\bar{1}$,889727	+1,7	10	$\bar{1}$,855788	+2,0
	$\bar{1}$,390879	$w=+36$		$\bar{1}$,390843	

$$\delta)\ -2,2v_4+2,4v_5-1,8v_6+2,1v_7-2,5v_8+2,3v_9-2,0v_{10}+1,7v_{11}+36=0.$$

2. Polul *a*

Numărul unghiului	lg sin	Δ	Numărul unghiului	lg sin	Δ
2	$\bar{1}$,848732	+2,1	3	$\bar{1}$,914741	+1,5
4	$\bar{1}$,838087	+2,2	5	$\bar{1}$,815993	+2,4
12	$\bar{1}$,881076	+1,8	13	$\bar{1}$,858198	+2,0
15	$\bar{1}$,817169	+2,4	16	$\bar{1}$,796136	+2,6
	$\bar{1}$,385064	$w=-4$		$\bar{1}$,385068	

$$\varepsilon)\ 2,1v_2-1,5v_3+2,2v_4-2,4v_5+1,8v_{12}-2,0v_{13}+2,4v_{15}-2,6v_{16}-4=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

5. Două ecuații de baze

Latura și numărul unghiului	lg sin	Δ	Latura și numărul unghiului	lg sin	Δ
AB	4,103695		*BC*	4,129520	
1	$\bar{1}$,993134	+0,4	*3*	$\bar{1}$,914741	+1,5
9	$\bar{1}$,833549	+2,3	*6*	$\bar{1}$,886106	+1,8
	+3,930378	$w = +11$		+3,930367	

$$\zeta)\ +0{,}4v_1 - 1{,}5v_3 - 1{,}8v_6 + 2{,}3v_9 + 11 = 0.$$

Latura și numărul unghiului	lg sin	Δ	Latura și numărul unghiului	lg sin	Δ
BC	4,129520		*CD*	4,160559	
2	$\bar{1}$,848732	+2,1	*1*	$\bar{1}$,993134	+0,4
17	$\bar{1}$,992993	−0,4	*16*	$\bar{1}$,796136	+2,6
20	$\bar{1}$,948679	+1,1	*18*	$\bar{1}$,970117	+0,8
	3,919924	$w = -22$		3,919946	

$$\eta)\ -0{,}4v_1 + 2{,}1v_2 - 2{,}6v_{16} - 0{,}4v_{17} - 0{,}8v_{18} + 1{,}1v_{20} - 22 = 0.$$

Grupa a II-a este formată deci din opt ecuații. Transformarea lor este redată de tabela de mai sus. Rezolvarea ecuațiilor normale ale corelatelor pentru ecuațiile transformate (A, B, ..., H) este dată în tabela 19. Corecțiile corespunzătoare v_i se calculează după tabela 18, fiind înscrise în ultima coloană a acestei tabele.

Controlul compensării. 1) Verificarea relației

$$[v''v''] = -[K\mathcal{W}].$$

Avem

$$[v''v''] = +172{,}33,\quad [k\mathcal{W}] = -171{,}95.$$

Discordanța 0,38 intră în toleranță (+1,00).

2) $[v'v'] = +19{,}38$, $[v''v''] = +172{,}33$, $[vv] = 191{,}99$.

Discordanța 0,28 este admisibilă.

Eroarea medie pătratică a compensării

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{l+\lambda}} = \pm\sqrt{\frac{191{,}99}{6+8}} = \pm\sqrt{\frac{192}{14}} = \pm 3'',7.$$

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 18. Coeficienţii ecuaţiilor de condiţie din grupa a II-a

Nr. necunoscute	α	β	γ	δ		ζ	η	ϑ	A	B	C	D	E	F	G	H	S	V
								K=	+1,8604	−1,1027	−4,3949	−1,1591	−1,4355	−1,4953	−0,0589	+4,9968		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1		+1					+0,4	−0.4		+0,80	−0,40	−1,00		−0,20	+0,77	−0,97	−1,00	−2,56
2			+1			+2,1		+2,1		−0,40	+0,80	−1,00		+1,90	+0,36	+1,53	+3,19	+2,87
3				+1		−1,5	−1,5			−0,40	−0,40	+2,00		−1,70	−1,13	−0,56	−2,19	−0,31
4					−2,2	+2,2			−1,00	−0,60	−0,30		−2,32	+2,25	+0,45		−1,52	+0,06
5	+1		+1		+2,4	−2,4			+1,00	−0,60	+0,90		+2,27	−2,35	+0,45		+1,67	−1,20
6	+1	+1			−1,8		−1,8		+1,00	+0,60	−0,30		−1,02	+0,05	−1,35		−1,92	+5,28
7		+1			+2,1				−1,00	+0,60	−0,30		+1,97	+0,05	+0,45		+1,77	−4,13
8					−2,5				−1,00		−0,30		−2,38		−0,54		−4,25	+2,91
9	+1				+2,3		+2,3		+1,00		−0,30		+2,4		+1.72		+4,85	−0,41
10	+1		+1		−2,0				+1,00		+0,90		−1,88		−0,57		−0,55	+0,64
11					+1,7				−1,00		−0,30		+1,83		−0,58		−0,05	−3,13
12						+1,8				−0,40				+1.87			+1,47	−2,36
13						−2,0				−0,40				−1,93			−2,33	+3,33
14		+1								+0,80				+0,06			+0,86	−0,97
15				+1		+2,4				−0,40		+2,00		+2,47		+1.00	+5,07	−0,57
16						−2,6		−2,6		−0,40		−1,00		−2,53		−1,60	−5,53	−2,61
17		+1						−0,4		+0,80		−1,00		+0,06		+0,60	+0,46	+3,19
18								−0,8				−1,00				−0,90	−1,90	−3,34
19				+1								+2,00				−0,10	+1,90	−2,82
20								+1,1				−1,00				+1,00	0,00	+6,16
W	−4,3	−0,8	−2,3	+3,7	+36,0	−4,0	+11,0	−22,0	−8,60	−0,96	−2,76	+11,10	+36,00	+4,00	+11,0	−22,0		

Scanned with OKEN Scanner

Tabela 19. **Rezolvarea ecuațiilor normale ale**

K_A	K_B	K_C	K_D	K_E	K_F
+ 8,0000	0	+2,4000	0	+ 1,8000	— 4,6000
—1	0	—0,3000	0	— 0,2250	+ 0,5750
	+4,320	—1,2000	— 2,4000	+ 0,0600	+ 0,0240
	+4,3200	—1,2000	— 2,4000	+ 0,0600	+ 0,0240
	—1	+0,2778	+ 0,5556	— 0,0139	— 0,0056
		+3,1200	— 1,2000	+ 0,4680	— 0,5400
		+2,0666	— 1,8667	— 0,0553	+ 0,8467
		—1	+ 0,9033	+ 0,0268	— 0,4097
			+18,0000	0	+ 2,3100
			+14,9804	— 0,0167	+ 3,0882
			—1	+ 0,0011	— 0,2061
				+36,5552	—10,5520
				+36,1479	— 9,4912
				—1	+ 0,2626
					+36,8608
					+30,7399
					—1

					K_F=—1,4953
				K_E=—1,4335	—0,3927
			K_D=—1,1591	—0,0016	+0,3082
		K_C=—4,3949	—1,0470	—0,0385	+0,6126
	K_B=—1,1027	—1,2209	—0,6440	+0,0200	+0,0084
K_A=+1,8604	0	+1,3185	0	+0,3230	—0,8598

Scanned with OKEN Scanner

grupei a II-a transformată

K_G	K_H	S_1	W	S	Control
+0,5000	0	+ 8,1000	— 8,6000	— 0,5000	
—0,0625	0		+ 1,0760	+ 0,0625	+ 0,0625
—0,1560	—0,4440	+ 0,2040	— 0,9600	— 0,7560	— 0,7560
+0,1560	—0,4440		— 0,9600	— 0,7560	
+0,0361	+0.1028		+ 0,2222	+ 0,1750	+ 0,7750
+0,2880	+1,8360	+ 5.1720	— 2,7600	+ 2,4120	
+0,0947	+1,7126		— 0,4466	+ 2,3520	+ 2,3520
—0,0458	—0,8287		+ 0,2161	— 1,1381	— 1,1380
—3,3900	+1,0200	+14,3400	+11,1000	+25,4400	
—3,3911	+2,3202		+10,1633	+27,1445	+27,1443
+0,2264	—0,1549		— 0,6784	— 1,8120	— 1,8119
+9,0024	0	+37,336	+36,0000	+73,3336	
+8,8908	+ 0,0546		+37,9477	+73,5498	+73,5498
—0,2460	— 0,0015		— 1,0498	— 2,0347	— 2,0347
+2,3610	+10,6070	+36,4708	— 4,0000	+32,4708	
+5,6446	+ 9,4437		— 0,8879	+44,9398	+44,9403
—0,1836	—30,3072		+ 0,0289	— 1,4619	— 1,4619
+8,3740	— 0,4367	+17,4161	+11,0000	+28,4161	
+4,3416	— 0,8799		+ 4,6534	+ 8,1150	+ 8,1151
—1	+ 0,2027		— 1,0718	— 1,8691	— 1,9631
	+ 9.3354	+22,7911	—22,0000	+ 0,7911	
	+ 4,4316		—22.1439	—17,7121	—17,7123
	—1		+ 4,9968	+ 3,9968	+ 3,9968

	K_H=+4,9968		+ 4,9968
K_G=+0.0589	+1,0129		— 1,0718
+0,0108	—1,5350		+ 0,0289
+0,0145	—0,0075		— 1,0498
—0,0133	—0,7740		0,6784
+0,0027	—4,1408		+ 0,2161
+0,0021	+0,5137		+ 0,2222
+0,0037	0		+ 1,0750

Scanned with OKEN Scanner

§ 139. Metoda de compensare pe trei grupe (Kobîlin)

Această metodă constituie o extrapolare a metodei de compensare pe două grupe, dezvoltată anterior.

Sistemul inițial al ecuațiilor de condiție se împarte în două grupe. Grupa I se tratează separat după metodele obișnuite de compensare. Grupa a doua se aduce mai întîi la o formă convenabilă printr-un procedeu care va fi expus mai jos; apoi, este și ea împărțită în două grupe: II și III. Prima dintre aceste grupe, II, se tratează independent după metodele cunoscute. Grupa III se aduce la o formă convenabilă și apoi se tratează separat.

În acest mod se obțin trei corecții distincte, care trebuie să satisfacă relația dintre corecții

$$v_i = v_i' + v_i'' + v_i''' \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

Dezvoltarea metodei. Să considerăm, de exemplu, sistemul ecuațiilor de condiție descompus în cele trei grupe de ecuații cu aceeași precizie

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Grupa I} \\
a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m + w_a = 0 \\
b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_mv_m + w_b = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_1v_1 + l_2v_2 + \cdots + l_mv_m + w_l = 0. \\
\text{Grupa a II-a} \\
\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_mv_m + w_\alpha = 0 \\
\beta_1v_1 + \beta_2v_2 + \cdots + \beta_mv_m + w_\beta = 0 \\
\gamma_1v_1 + \gamma_2v_2 + \cdots + \gamma_mv_m + w_\gamma = 0. \\
\text{Grupa a III-a} \\
A_1v_1 + A_2v_2 + \cdots + A_mv_m + w_A = 0 \\
B_1v_1 + B_2v_2 + \cdots + B_mv_m + w_B = 0.
\end{array}\right\} \quad (329)$$

Dacă există ecuații în care necunoscutele au coeficienții egali cu $+1$ și dacă aceeași necunoscută nu figurează în ecuații diferite, acestea se trec în grupa I. Celelalte ecuații în care necunoscutele au coeficienți egali cu $+1$ se trec în grupa a II-a. Restul ecuațiilor formează grupa a III-a.

Tratarea ecuațiilor din grupa I constă în distribuția erorii de discordanță w, respectivă, în mod egal, la toate necunoscutele care

Scanned with OKEN Scanner

intră în ecuaţia de condiţie respectivă. În acest mod, prima corecţie va fi dată de relaţia

$$v'_{ir} = -\frac{w_r}{n_r}, \tag{330}$$

unde w_r este termenul liber al ecuaţiei de condiţie cu numărul de ordine r din prima grupă; n_r este numărul necunoscutelor din aceeaşi ecuaţie de condiţie (cu numărul de ordine r).

Întrucît coeficienţii $a, b, \ldots, l$ sînt consideraţi egali cu unitatea, după modul cum a fost alcătuită grupa I, coeficienţii grupelor a II-a şi a III-a se vor corecta după relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{ir} &= \alpha_{ir} - \frac{[\alpha]_r}{n_r} \\ \beta'_{ir} &= \beta_{ir} - \frac{[\beta]_r}{n_r} \\ \gamma'_{ir} &= \gamma_{ir} - \frac{[\gamma]_r}{n_r} \end{aligned}\right\} \tag{331}$$

$$\left.\begin{aligned} A'_{ir} &= A_{ir} - \frac{[A]_r}{n_r} \\ B'_{ir} &= B_{ir} - \frac{[B]_r}{n_r}, \end{aligned}\right\} \tag{332}$$

unde am notat prin $[\alpha]_r$ suma tuturor coeficienţilor α din ecuaţia de ordinul r. Corelatele ecuaţiilor din grupa a II-a şi a III-a astfel transformate se pot exprima cu ajutorul termenilor liberi

$$\left.\begin{aligned} K_1 &= f_{11} w_\alpha + f_{12} w_\beta + f_{13} w_\gamma \\ K_2 &= f_{21} w_\alpha + f_{22} w_\beta + f_{23} w_\gamma \\ K_3 &= f_{31} w_\alpha + f_{32} w_\beta + f_{33} w_\gamma. \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

Corecţiile secunde v''_i se determină după formulele

$$\begin{aligned} v''_i = &-(\alpha' f_{11} + \beta'_i f_{12} + \gamma'_i f_{13}) w_\alpha + (\alpha'_i f_{12} + \beta'_i f_{22} + \gamma' f_{23}) w_\beta + \\ &+ (\alpha'_i f_{13} + \beta'_i f_{23} + \gamma'_i f_{33}) w_\gamma. \end{aligned} \tag{334}$$

În aceste expresii, termenii liberi w sînt obţinuţi după aplicarea primelor corecţii. Se obişnuieşte a se introduce notaţiile

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \alpha'_i f_{11} + \beta'_i f_{12} + \gamma'_i f_{13}, \\ q_i &= \alpha'_i f_{12} + \beta'_i f_{22} + \gamma'_i f_{23}, \\ s_i &= \alpha'_i f_{13} + \beta'_i f_{23} + \gamma'_i f_{33}, \end{aligned}\right\} \tag{335}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel încît relaţia (334) se scrie prescurtat

$$v_i'' = p_i w_\alpha + q_i w_\beta + s_i w_\gamma . \tag{336}$$

Ne folosim acum iarăşi de faptul că în grupa a II-a coeficienţii necunoscutelor care figurează în ecuaţiile acestei grupe sînt egali cu unitatea. Se pot calcula atunci dinainte coeficienţii p_i, q_i, s introduşi mai sus şi se înscriu într-o tabelă care foloseşte la calculul corecţiilor de ordinul al doilea după formula (336), avînd termenii liberi w calculaţi pentru ecuaţiile grupei a II-a.

În continuare, se face o a doua transformare a coeficienţilor ecuaţiilor grupei a III-a, după formulele

$$\left.\begin{aligned} A_i'' &= A_i' + \alpha_i' \rho_{11} + \beta_i' \rho_{12} + \gamma' \rho_{13}, \\ B_i'' &= B_i' + \alpha_i' \rho_{21} + \beta' \rho_{22} + \gamma_i' \rho_{23}, \end{aligned}\right\} \tag{337}$$

sau, punînd

$$A_i'' = A' + \Delta A', \quad B_i'' = B_i' + \Delta B_i', \tag{338}$$

rezultă

$$\left.\begin{aligned} \Delta A' &= \alpha_i' \rho_{11} + \beta_i' \rho_{12} + \gamma_i' \rho_{13} \\ \Delta B_i' &= \alpha_i' \rho_{21} + \beta_i' \rho_{22} + \gamma_i' \rho_{23} . \end{aligned}\right\} \tag{339}$$

Procedînd ca în metoda compensării pe două grupe, dezvoltată anterior, folosim multiplicatorii nedeterminaţi din ecuaţiile pentru corelate (333); obţinem relaţiile

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11} &= f_{11}[\alpha' A'] + f_{12}[\beta' A'] + f_{13}[\gamma' A'] \\ \rho_{12} &= f_{12}[\alpha' A'] + f_{22}[\beta' A'] + f_{23}[\gamma' A'] \\ \rho_{13} &= f_{13}[\alpha' A'] + f_{23}[\beta' A'] + f_{33}[\gamma' A'], \end{aligned}\right\} \tag{340}$$

deoarece în locul termenilor liberi w se substituie parantezele

$$[\alpha' A'], [\beta' A'], [\gamma' A'], \ldots \tag{341}$$

Dar, ca şi în cazul a două grupe, avem relaţiile

$$\left.\begin{aligned} [\alpha' A'] &= [\alpha A'] = [A']_1^{II}, \\ [\beta' A'] &= [\beta A'] = [A']_2^{II}, \\ [\gamma' A'] &= [\gamma A'] = [A']_3^{II}, \end{aligned}\right\} \tag{342}$$

unde $[A']_i^{II}$ este suma coeficienţilor A' ai necunoscutelor care figurează în ecuaţia $i = 1, 2, 3$ din grupa a II-a.

Scanned with OKEN Scanner

Formulele (340) devin astfel

$$\left.\begin{aligned} \rho_{11} &= f_{11}[A']_1^{II} + f_{12}[A']_2^{II} + f_{13}[A']_3^{II}, \\ \rho_{12} &= f_{12}[A']_1^{II} + f_{22}[A']_2^{II} + f_{13}[A']_3^{II}, \\ \rho_{13} &= f_{13}[A']_1^{II} + f_{23}[A']_2^{II} + f_{33}[A']_3^{II}. \end{aligned}\right\} \quad (343)$$

Înlocuind aceste expresii în formulele (339), obținem

$$\Delta A_i' = (\alpha_i' f_{11} + \beta' f_{12} + \gamma_i' f_{13})[A']_1^{II} + (\alpha_i' f_{12} + \beta_i' f_{22} + \gamma_i' f_{23})[A]_2^{II} + (\alpha_i' f_{13} + \beta_i' f_{23} + \gamma_i' f_{33})[A']_3^{II} \quad (344)$$

sau, folosind notațiile (335),

$$\Delta A_i' = p_i[A']_1^{II} + q_i[A']_2^{II} + s_i[A']_3^{II}. \quad (345)$$

În mod analog se deduce pentru cea de-a doua formulă (339)

$$\Delta B_i' = p_i[B']_1^{II} + q_i[B']_2^{II} + s_i[B']_3^{II}. \quad (346)$$

Formulele (344), (345) și (338) ne arată că transformarea coeficienților A', B. în A_i'', B_i'' este asigurată prin cunoașterea parametrilor p_i, q_i, s_i, care sînt dați pentru fiecare problemă specială.

După ce am determinat coeficienții transformați A_i'', B_i'', procedăm la rezolvarea grupei a III-a și obținem corecțiile

$$v_i''' = A_i'' K_1 + B_i'' K_2. \quad (347)$$

Aplicație numerică. Metoda compensării pe trei grupe își găsește o interesantă întrebuințare în operația de îndesire a unei rețele de triangulație, prin introducerea unor puncte sau grupe de puncte suplimentare. Pentru aceasta,

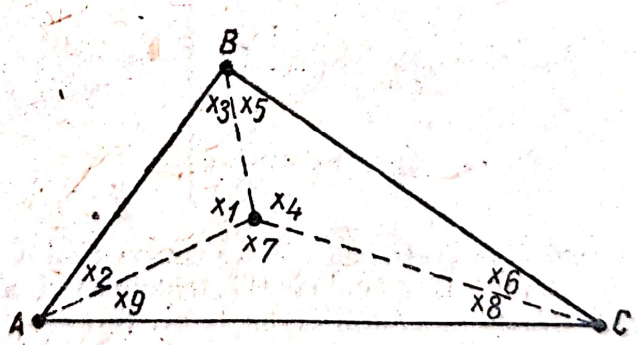


Fig. 17

se folosesc mai multe puncte din rețeaua considerată. Avantajul metodei de compensare pe trei grupe se datorește faptului că, într-o astfel de problemă, apare un număr mare de ecuații de condiție, ceea ce face greoaie aplicarea metodei pe două grupe.

Să considerăm cazul unui triunghi ABC (puncte fixe, tari), în care să intercalăm punctul din interior (fig. 17).

În această problemă apar șapte ecuații de condiție, pe care le împărțim în trei grupe după criteriile expuse în teoria generală precedentă.

Grupa I

$$\begin{aligned} x_2+x_9+v_1&=0\\ x_3+x_5+v_2&=0\\ x_6+x_8+v_3&=0\\ x_1+y_4+x_7+v_4&=0. \end{aligned}$$

Grupa II

$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+w_1&=0\\ x_4+x_5+x_6+w_2&=0. \end{aligned}$$

Grupa III

$$\ln\frac{\sin x_2\cdot\sin x_5\cdot\sin x_8}{\sin x_3\cdot\sin x_6\cdot\sin x_9}=W.$$

Compensarea primei grupe se rezumă la repartizarea discordanței v_5 din fiecare ecuație în mod egal la fiecare unghi; prin urmare, primele corecții vor fi date de relația

$$x'_{is}=-\frac{v_s}{n_s}. \tag{348}$$

Transformăm ecuațiile grupei a II-a și a III-a după regula generală stabilită mai sus; coeficientul transformat este egal cu coeficientul netransformat, din care se scade media aritmetică a coeficienților primei grupe

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_{is}&=\alpha_{is}-\frac{[\alpha]_s}{n_s}\\ \beta'_{is}&=\beta_{is}-\frac{[\beta]_s}{n_s}\\ A'_{is}&=A_{is}-\frac{[A]_s}{n_s}. \end{aligned}\right\} \tag{349}$$

În aceste formule α și β sînt coeficienții netransformați din ecuațiile de condiție (grupa a II-a); α', β' sînt coeficienții transformați ai grupei a doua; A coeficienții netransformați ai ecuațiilor de laturi (grupa a III-a); A' coeficienții transformați ai grupei a treia; s numărul ecuației dintr-o grupă; n_s numărul necunoscutelor din ecuația respectivă.

Termenii liberi ai ecuațiilor grupei a II-a se determină după unghiurile corectate prin corecțiile prime. Termenul liber al ecuației din grupa a III-a se determină după corectarea unghiurilor, dar prin corecția a doua. Rezolvarea grupei a II-a ne dă, folosind corelatele exprimate cu ajutorul termenilor liberi,

$$\left.\begin{aligned} K_1&=f_{11}w_1+f_{12}w_2\\ K_2&=f_{12}w_1+f_{22}w_2. \end{aligned}\right\} \tag{350}$$

Scanned with OKEN Scanner

Corecțiile se exprimă atunci, în a doua corectare, prin

$$x_i'' = (\alpha_i' f_{11} + \beta_i' f_{12}) w_1 + (\alpha_i' f_{12} + \beta_i' f_{22}) w_2 \quad (351)$$

sau

$$x_i'' = p_i w_1 + q_i w_2 . \quad (352)$$

Valorile parametrilor p_i și q_i se calculează anticipat pentru figura considerată și le redăm în următoarea tabelă:

Unghiul	p	q	Unghiul	p	q
x_1	−0,4	0,0	x_6	−0,2	−0,4
x_3	−0,4	−0,2	x_7	+0,4	+0,4
x_4	−0,2	+0,2	x_8	+0,2	+0,4
x_2	0,0	−0,4	x_9	+0,4	+0,2
x_5	+0,2	−0,2			

Folosind tabela coeficienților p și q se poate calcula x'' după formula (352). Ecuația de laturi care formează grupa a III-a se rezolvă după o a doua transformare a coeficienților, după formula

$$A_i'' = A_i' A + \Delta A_i', \quad (353)$$

unde

$$\Delta A_i' = p_i [A']_1^{II} + q_i [A']_2^{II}, \quad (354)$$

însemnînd cu $[A']_1^{II}$ și $[A']_2^{II}$ suma coeficienților necunoscutelor care intră în ecuația întîi, respectiv a doua, din grupa a II-a. În acest mod, după cum se vede din relația (354), și transformarea a doua a coeficienților ecuației din grupa a III-a se efectuează folosind tabela. Corecțiile efectuate a treia oară se determină după formula

$$x_i''' = -\frac{W}{[A''A'']} A_i'' .$$

Parametrii λ care intervin în funcția de pondere se transformă în mod analog ca și coeficienții ecuațiilor de condiție

$$\lambda_{is}' = \lambda_{is} - \frac{[\lambda]_s}{n_s},$$

$$\lambda_i'' = \lambda_i' + \Delta\lambda_i',$$

$$\Delta\lambda_i' = p_i [\lambda']_i^{II} + q_i [\lambda']_2^{II} .$$

Să considerăm acum cazul concret propus ca aplicație. Valorile unghiurilor măsurate se iau din caietul de teren. Fie de exemplu, valorile măsurate luate din caietul triangulației

Unghiul	Vîrful	Valoarea unghiului
$x_2 + x_9$	A	59°26′54″,9
$x_3 + x_5$	B	70°39′44″,5
$x_6 + x_8$	C	49°53′20″,6

Scanned with OKEN Scanner

Folosind această tabelă putem construi tabela următoare, care ne dă discordanțele v_i și w_i pentru prima grupă și a doua grupă.

Unghiurile măsurate față de punctul M

Unghiul	Valoarea	Unghiul	Valoarea
x_2 x_9	15°40'24" 43°46'31"	x_3 x_5	46°04'36" 24°35'14"
x_2+x_9 din triangulație	59°26'55" 59°26'54",9	x_3+x_5 din triangulație	70°39'50" 70°39'44",5
v_1	+0,1"	v_2	+5",5
x_6 x_8	8°34'00" 41°19'11"	x_1 x_4 x_7	118°14'57" 146°50'50" 94°54'13"
x_6+x_8 din triangulație	49°53'11" 49°53'20",6	$x_1+x_4+x_7$	360°00'00"
v_3	—9,6"	v_4	0,0

Cu ajutorul acestei tabele putem scrie relațiile grupei I și a II-a.

Grupa I

$$x_2+x_9+0",1=0$$
$$x_3+x_5+5",5=0$$
$$x_6+x_8-9",6=0$$
$$x_1+x_4+x_7+0=0.$$

Grupa II

$$x_1+x_2+x_3-5",7=0$$
$$x_4+x_5+x_6+6",0=0.$$

Pentru a scrie ecuațiile grupei a III-a trebuie să alcătuim tabela valorilor care apar în această ecuație, bineînțeles corectate.

Pentru formarea ecuației grupei a III-a avem

Unghiul	Unghiurile corectate a doua oară	lg sin	Δ	Unghiul	Unghiurile corectate a doua oară	lg sin	Δ
x_2	15°40'25",1	$\bar{1}$,43216	+7,5	x_3	46°04'35",6	$\bar{1}$,85749	+2,0
x_5	24°35'08",9	$\bar{1}$,61915	+4,6	x_6	8°34'03",5	$\bar{1}$,17312	+14,0
x_8	41°19'17",1	$\bar{1}$,81973	+2,4	x_9	43°46'29",8	$\bar{1}$,83999	+2,2
		$\bar{2}$,87050				$\bar{2}$,87060	
		$\bar{2}$,87061					
		$w=-110$					

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţia grupei a III-a devine, cu valorile de mai sus,

$$7{,}5\,x_2-2{,}0\,x_3+4{,}6\,x_5-14{,}0\,x_6+2{,}4\,x_8-2{,}2\,x_9-110=0.$$

§ 140. Determinarea necunoscutelor rezultate din măsurători indirecte şi supuse la relaţii de condiţie, care trebuie să fie satisfăcute riguros

Să admitem deci că prin măsurători directe am determinat n mărimi $l_1, l_2, \ldots, l_n$, care sînt legate de s necunocscute $x, y, z, t, \ldots, u$ prin n ecuaţii de erori. Între aceste necunoscute mai există r relaţii de condiţie care trebuie să fie satisfăcute riguros.

Fie *ecuaţiile erorilor*

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t+\cdots+s_1u+l_1=v_1\\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t+\cdots+s_2u+l_2=v_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \underbrace{a_nx+b_ny+c_nz+d_nt+\cdots+s_nu+l_n=v_n}_{s\text{ necunoscute}}, \end{array}\right\}\ n\text{ ecuaţii} \qquad (355)$$

unde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sînt corecţiile care trebuie aplicate valorilor $l_1, l_2, \ldots, l_n$ pentru a fi satisfăcut riguros sistemul (355).

Fie *ecuaţiile de condiţie*

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+A_2y+A_3z+A_4t+\cdots+A_su+A_0=0\\ B_1x+B_2y+B_3z+B_4t+\cdots+B_su+B_0=0\\ C_1x+C_2y+C_3z+C_4t+\cdots+C_su+C_0=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \underbrace{R_1x+R_2y+R_3z+R_4t+\cdots+R_su+R_0=0}_{s\text{ necunoscute}}. \end{array}\right\}\ r\text{ ecuaţii} \qquad (356)$$

În conformitate cu principiul celor mai mici pătrate, cele mai bune valori pe care le putem găsi pentru necunoscutele $x, y, z, t, \ldots, u$ sînt acelea pentru care este satisfăcută

condiţia de compensare

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=\text{minimă}. \qquad (357)$$

Această problemă se poate reduce la problema compensării prin măsurători indirecte, dar fără ecuaţii de condiţie, dacă cu ajutorul celor r ecuaţii de condiţie (356) se elimină r dintre necunoscute, care pot fi exprimate prin celelalte $s=r$ ce rămîn, considerate ca arbitrare în sistemul ecuaţiilor de condiţie.

Scanned with OKEN Scanner

Procedînd astfel, sistemul (356) poate fi considerat ca rezolvat prin relaţiile

$$\left.\begin{array}{l} x = A_1'z + A_2't + \cdots \\ y = B_1'z + B_2't + \cdots \\ \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{s-r \text{ necunoscute}} \end{array}\right\} \; r \text{ ecuaţii} \qquad (358)$$

Înlocuind valorile (358) ale celor r necunoscute exprimate prin restul de $s-r$ ecuaţii, obţinem un nou sistem de ecuaţii ale erorilor pentru cele $s-r$ necunoscute rămase

$$\left.\begin{array}{l} c_1'z + d_1't + \cdots + l_1' = v_1 \\ c_2'z + d_2't + \cdots + l_2' = v_2 \\ c_3'z + d_3't + \cdots + l_3' = v_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{c_n'z + d_nt + \cdots + l_n' = v_n}_{s-r \text{ necunoscute}} \end{array}\right\} \; n \text{ ecuaţii} \qquad (359)$$

Sistemul (359), astfel obţinut, constituie un sistem de ecuaţii ale erorilor unde necunoscutele sînt determinate indirect, fără a mai fi supuse la ecuaţii de condiţie — problemă pe care o putem rezolva după metodele expuse anterior.

După efectuarea compensării, putem scrie expresia erorii medii pătratice

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{(n-s)+r}}. \qquad (360)$$

Între numerele n, s şi r au loc următoarele relaţii. Pentru că sistemul ecuaţiilor de condiţie (356) trebuie să fie satisfăcut riguros, fără ca prin aceasta x, y, z, t, ... să fie determinate complet, trebuie să avem

$$s > r, \qquad (361)$$

iar pentru ca cele n ecuaţii (359) între $s-r$ necunoscute să-şi păstreze caracterul de ecuaţii de erori, trebuie ca numărul ecuaţiilor să fie mai mare decît numărul necunoscutelor, deci

$$n > s-r. \qquad (362)$$

Fiind satisfăcute condiţiile (361) şi (362), urmează că numitorul din expresia (360) este esenţial pozitiv, expresia totală fiind un număr real.

Procedeul descris mai sus este adecvat dacă există numai un număr mic de ecuaţii de condiţie; dar atunci, alegerea necunoscutelor pe care vrem să le eliminăm depinde de natura problemei.

Pentru problemele de triangulaţie în mare, se recomandă o altă metodă de eliminare mai simetrică, pe care o tratăm în paragraful care urmează.

§ 141. Compensare prin descompunere în două etape

Prima compensare. Reluăm problema precedentă a compensării unor variabile determinate indirect şi supuse la anumite relaţii de condiţie.

Pentru a uşura expunerea, ne mărginim la cazul mai simplu

$$n=4,\ s=3,\ r=2.$$

Deci patru observaţii directe, trei necunoscute şi două ecuaţii de condiţie, fiind satisfăcute relaţiile (361) şi (362): $s>r$, $n'>s-r$.

Ecuaţiile erorilor

$$\left.\begin{array}{r}n=4\\ \text{ecuaţii}\end{array}\right\}\underbrace{\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1z+l_1=v_1\\ a_2x+b_2y+c_2z+l_2=v_2\\ a_3x+b_3y+c_3z+l_3=v_3\\ a_4x+b_4y+c_4z+l_4=v_4.\end{cases}}_{s=3\ \text{necunoscute}} \tag{363}$$

Ecuaţiile de condiţie

$$\left.\begin{array}{r}r=2\\ \text{ecuaţii}\end{array}\right\}\underbrace{\begin{cases}A_1x+A_2y+A_3z+A_0=0\\ B_1x+B_2y+B_3z+B_0=0.\end{cases}}_{s=3\ \text{necunoscute}} \tag{364}$$

Principiul de compensare

$$[vv]=v_1^2+v_2^2+\cdots+v_n^2=\text{minimă}. \tag{365}$$

Metoda compensării în două etape constă în tratarea iniţială — deci în prima etapă — a sistemului (363) ca sistem de erori, fără a mai ţine seama de ecuaţiile de condiţie (364). Pentru a distinge valorile necunoscutelor în această primă etapă, le afectăm de indicele zero: x_0, y_0, z_0.

Scanned with OKEN Scanner

În aceste condiții, din sistemul erorilor (363), în prima etapă obținem ecuațiile normale după procedeul obișnuit

$$\left.\begin{aligned}
[aa]x_0+[ab]y_0+[ac]z_0+[al]&=0\\
[ab]x_0+[bb]y_0+[bc]z_0+[bl]&=0\\
[ac]x_0+[bc]y_0+[cc]z_0+[cl]&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{336}$$

Sistemul (366) se rezolvă în raport cu x_0, y_0, z_0, putîndu-se determina, totodată, parametrii de pondere Q_1, Q_2, Q_3, după procedeul cunoscut (§ 113). Mai mult, se pot determina corecțiile respective ale măsurătorilor din ecuațiile corespunzătoare, construite la fel cu sistemul (363) dar cu necunoscutele x_0, y_0, z_0, punînd pentru corecții notațiile v_1', v_2', v_3', v_4' în această primă etapă

$$\left.\begin{aligned}
a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0+l_1&=v_1'\\
a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0+l_2&=v_2'\\
a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0+l_3&=v_3'\\
a_4x_0+b_4y_0+c_4z_0+l_4&=v_4'.
\end{aligned}\right\} \tag{367}$$

Rezolvarea acestei probleme de compensare constituie prima etapă, sau prima compensare. Ea permite calculul compensărilor v_1', v_2', v_3', v_4' și calculul necunoscutelor x_0, y_0, z_0 din sistemul (366), astfel încît sistemul (367) să fie satisfăcut riguros.

A doua compensare. După această primă compensare urmează compensarea în etapa a doua a valorilor x_0, y_0, z_0 astfel găsite, pentru a obține valorile căutate x, y, z care țin seamă și de condițiile (364), numită compensarea a doua și care ne permite calculul corecțiilor δx, δy, δz, pentru care avem

$$x=x_0+\delta x,\quad y=y_0+\delta y,\quad z=z_0+\delta z. \tag{368}$$

Forma finală a ecuațiilor erorilor (363) ia atunci aspectul

$$\left.\begin{aligned}
a_1(x_0+\delta x)+b_1(y_0+\delta y)+c_1(z_0+\delta z)+l_1&=v_1'+v_1''=v_1\\
a_2(x_0+\delta x)+b_2(y_0+\delta y)+c_2(z_0+\delta z)+l_2&=v_2'+v_2''=v_2\\
a_3(x_0+\delta x)+b_3(y_0+\delta y)+c_3(z_0+\delta z)+l_3&=v_3'+v_3''=v_3\\
a_4(x_0+\delta x)+b_4(y_0+\delta y)+c_4(z_0+\delta z)+l_4&=v_4'+v_4''=v_4.
\end{aligned}\right\} \tag{369}$$

Dacă avem în vedere sistemul (367), constatăm că valorile corecțiilor totale v_1, v_2, v_3, v_4 se compun din primele corecții v_1', v_2', v_3', v_4', ale primei etape și din corecțiile v_1'', v_2'', v_3'', v_4'' ale etapei a

doua şi care, din compararea sistemelor (369) şi (367), rezultă că sînt date de noul sistem de ecuaţii ale erorilor din etapa a doua

$$\left.\begin{aligned} a_1\delta x+b_1\delta y+c_1\delta z&=v_1''\\ a_2\delta x+b_2\delta y+c_2\delta z&=v_2''\\ a_3\delta x+b_3\delta y+c_3\delta z&=v_3''\\ a_4\delta x+b_4\delta y+c_4\delta z&=v_4. \end{aligned}\right\} \qquad (370)$$

Mărimile x_0, y_0, z_0; v_1', v_2', v_3', v_4' trebuie privite ca valori ale mărimilor x, y, z; v_1, v_2, v_3, v_4 calculate în primă aproximaţie, şi care, în dezvoltările ulterioare, vor fi tratate drept numere constante.

Mai avem deci de determinat valorile δx, δy, δz; v_1'', v_2'', v_3'', v_4'', astfel încît să fie satisfăcută condiţia de minim (365) şi totodată să fie satisfăcute şi ecuaţiile de condiţie (364), pe care nu le-am utilizat în prima compensare.

Înainte de a trece la a doua compensare, este necesar să punem sub o formă convenabilă suma pătratelor erorilor aparente $[vv]$. Avem, prin definiţie [formulele (369)]

$$v_i=v_i'+v_i'' \quad (i=1,2,3,4).$$

Ridicînd la pătrat şi adunînd, obţinem în formă gaussiană

$$[vv]=[v'v']+[v''v'']+2[v'v'']. \qquad (371)$$

Să demonstrăm că

$$[v'v'']=0. \qquad (372)$$

În acest scop, înmulţim, succesiv, în ecuaţiile (370) cu v_1', v_2', v_3', v_4' şi adunăm rezultatele; obţinem

$$[v'v'']=[av']\delta x+[bv']\delta y+[cv']\delta z. \qquad (373$$

Dar înmulţind ecuaţiile (367), succesiv, prin a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ..., c_1, c_2, ... şi adunînd rezultatele, se obţine dacă se iau în considerare ecuaţiile (366)

$$[av']=[aa]x_0+[ab]y_0+[ac]z_0+[al]=0$$

şi la fel

$$[bv']=0, \quad [cv']=0,$$

ceea ce, după (373), demonstrează relaţia (372).

În definitiv, relaţia (371) se reduce în aceste condiţii la

$$[vv]=[v'v']+[v''v''], \qquad (374)$$

relație importantă care ne arată că aflarea minimului sumei $[vv]$ se descompune în două părți: prima parte am stabilit-o în prima etapă a compensării căutînd minimul sumei $[v'v']$; rămîne să mai stabilim minimul sumei $[v''v'']$ în cea de a doua etapă a compensării. Această proprietate se bazează pe faptul că cei doi termeni ai expresiei din membrul al doilea al formulei (374) sînt mărimi pozitive.

Pentru a pregăti compensarea a doua, mai observăm că descompunerea (368) trebuie să satisfacă riguros și ecuațiile de condiție (364)

$$\left.\begin{aligned} A_1(x_0+\delta x)+A_2(y_0+\delta y)+A_3(z_0+\delta z)+A_0=0 \\ B_1(x_0+\delta x)+B_2(y_0+\delta y)+B_3(z_0+\delta z)+B_0=0. \end{aligned}\right\} \tag{375}$$

Notînd

$$\left.\begin{aligned} A_1x_0+A_2y_0+A_3z_0+A_0=w_1 \\ B_1x_0+B_2y_0+B_3z_0+B_0=w_2, \end{aligned}\right\} \tag{376}$$

observăm că w_1, w_2 sînt mărimi cunoscute după prima compensare, iar ecuațiile de condiție pentru compensările δx, δy, δz devin

$$\left.\begin{aligned} A_1\delta x+A_2\delta y+A_3\delta z+w_1=0 \\ B_1\delta x+B_2\delta y+B_3\delta z+w_2=0, \end{aligned}\right\} \tag{377}$$

deci păstrează aceleași expresii ca și ecuațiile de condiție inițiale (364), avînd schimbați termenii liberi.

§ 142. Compensarea a doua, prin corelate

Problema care se pune este să se facă minimă suma $[v''v'']$ sub condiția satisfacerii relațiilor (377).

Observăm că, dacă în ecuațiile de condiție (377) ar figura mărimile v_1'', v_2'', v_3'', v_4'' [ca în ecuațiile (365)] în locul corecțiilor δx, δy, δz, am putea proceda după metoda corelatelor. Cum acesta nu este cazul, este necesar să exprimăm mărimile δx, δy, δz prin v_1'', v_2'', v_3'', v_4''. În acest scop, înmulțim în ecuațiile (370) succesiv prin a_1, a_2, a_3, a_4, apoi prin b_1, b_2, b_3, b_4 și prin c_1, c_2, c_3, c_4 și adunăm; obținem astfel ecuațiile

$$\left.\begin{aligned} [aa]\delta x+[ab]\delta y+[ac]\delta z=[av''] \\ [ab]\delta x+[bb]\delta y+[bc]\delta z=[bv''] \\ [ac]\delta x+[bc]\delta y+[cc]\delta z=[cv''], \end{aligned}\right\} \tag{378}$$

care au exact aspectul ecuațiilor normale ale determinărilor indirecte, în care am înlocuit l_1, l_2, l_3, l_4 prin $-v_1''$, $-v_2''$, $-v_3''$, $-v_4''$. Din teoria compensării observațiilor indirecte știm că soluția generală a ecuațiilor normale se poate scrie sub forma

$$\left.\begin{aligned}\delta x &= -(\alpha_1 v_1'' + \alpha_2 v_2'' + \alpha_3 v_3'' + \alpha_4 v_4'')\\ \delta y &= -(\beta_1 v_1'' + \beta_2 v_2'' + \beta_3 v_3'' + \beta_4 v_4'')\\ \delta z &= -(\gamma_1 v_1'' + \gamma_2 v_2'' + \gamma_3 v_3'' + \gamma_4 v_4''),\end{aligned}\right\} \qquad (379)$$

unde coeficienții α, β, γ trebuie calculați cu ajutorul coeficienților de pondere, în prima parte a compensării, după cum am observat la începutul paragrafului precedent.

Să înlocuim expresiile (379) în ecuațiile de condiție (377); se obțin astfel ecuațiile de condiție referitoare la corecțiile v_i'', pe care le-am căutat, numite ecuațiile corecțiilor v_i''

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{I}_1 v_1'' + \mathrm{I}_2 v_2'' + \mathrm{I}_3 v_3'' + \mathrm{I}_4 v_4'' + w_1 &= 0\\ \mathrm{II}_1 v_1'' + \mathrm{II}_2 v_2'' + \mathrm{II}_3 v_3'' + \mathrm{II}_4 v_4'' + w_2 &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (380)$$

unde coeficienții I și II au expresiile următoare

$$\left.\begin{aligned}-\mathrm{I}_1 &= A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 + A_3\gamma_1, & -\mathrm{II}_1 &= B_1\alpha_1 + B_2\beta_1 + B_3\gamma_1\\ -\mathrm{I}_2 &= A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 + A_3\gamma_2, & -\mathrm{II}_2 &= B_1\alpha_2 + B_2\beta_2 + B_3\gamma_2\\ -\mathrm{I}_3 &= A_1\alpha_3 + A_2\beta_3 + A_3\gamma_3, & -\mathrm{II}_3 &= B_1\alpha_3 + B_2\beta_3 + B_3\gamma_3\\ -\mathrm{I}_4 &= A_1\alpha_4 + A_2\beta_4 + A_3\gamma_4, & -\mathrm{II}_4 &= B_1\alpha_4 + B_2\beta_4 + B_3\gamma_4.\end{aligned}\right\} \qquad (381)$$

În acest mod, problema s-a redus la compensarea unor determinări directe condiționate. Prin urmare, introducînd corelatele K_1 și K_2 putem forma ecuațiile normale ale corelatelor

$$\left.\begin{aligned}[\mathrm{I}\ \mathrm{I}]K_1 + [\mathrm{I}\ \mathrm{II}]K_2 + w_1 &= 0\\ [\mathrm{I}\ \mathrm{II}]K_1 + [\mathrm{II}\ \mathrm{II}]K_2 + w_2 &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad (382)$$

de unde rezultă

$$\left.\begin{aligned}v &= \mathrm{I}_1 K_1 + \mathrm{II}_1 K_2\\ v_2'' &= \mathrm{I}_2 K_1 + \mathrm{II}_2 K_2\\ v_3'' &= \mathrm{I}_3 K_1 + \mathrm{II}_3 K_2\\ v_4'' &= \mathrm{I}_4 K_1 + \mathrm{II}_4 K_2.\end{aligned}\right\} \qquad (383)$$

Scanned with OKEN Scanner

Relaţiile (381) ne permit formarea sumelor [I I], [I II], [II II], care figurează în ecuaţiile normale (382); se obţine

$$\left.\begin{aligned}
[\mathrm{I\,I}] &= A_1A_1[\alpha\alpha]+2A_1A_2[\alpha\beta]+2A_1A_3[\alpha\gamma]+\\
&\quad +A_2A_2[\beta\beta]+2A_2A_3[\beta\gamma]+\\
&\quad +A_3A_3[\gamma\gamma],\\
[\mathrm{II\,II}] &= B_1B_1[\alpha\alpha]+B_1B_2[\alpha\beta]+2B_1B_3[\alpha\gamma]+\\
&\quad +B_2B_2[\beta\beta]+2B_2B_3[\beta\gamma]+\\
&\quad +B_3B_3[\gamma\gamma],\\
[\mathrm{I\,II}] &= A_1B_1[\alpha\alpha]+A_1B_2[\alpha\beta]+A_1A_3[\alpha\gamma]+\\
&\quad +A_2B_1[\alpha\beta]+A_2B_2[\beta\beta]+A_2A_3[\beta\gamma]+\\
&\quad +A_3B_1[\alpha\gamma]+A_3B_2[\beta\gamma]+A_3A_3[\gamma\gamma].
\end{aligned}\right\} \qquad (384)$$

Dacă înlocuim valorile (381) în ecuaţiile (383), obţinem corecţiile în cea de-a doua compensare, în funcţie de corelate

$$\left.\begin{aligned}
v_1'' &= -(A_1\alpha_1+A_2\beta_1+A_3\gamma_1)K_1-(B_1\alpha_1+B_2\beta_1+B_3\gamma_1)K_2\\
v_2'' &= -(A_1\alpha_2+A_2\beta_2+A_3\gamma_2)K_1-(B_1\alpha_2+B_2\beta_2+B_3\gamma_2)K_2\\
v_3'' &= -(A_1\alpha_3+A_2\beta_3+A_3\gamma_3)K_1-(B_1\alpha_3+B_2\beta_3+B_3\gamma_3)K_2\\
v_4'' &= -(A_1\alpha_4+A_2\beta_4+A_3\gamma_4)K_1-(B_1\alpha_4+B_2\beta_4+B_3\gamma_4)K_2.
\end{aligned}\right\} \qquad (385)$$

Corelatele se calculează prin rezolvarea ecuaţiilor normale ale corelatelor (382). Înlocuind valorile precedente (385) în relaţiile (379), se obţin compensările în cea de-a doua etapă

$$\left.\begin{aligned}
\xi x &= x-x_0 = [\alpha\alpha]A_1K_1+[\alpha\alpha]B_1K_2+[\alpha\beta]A_2K_1+[\alpha\beta]B_2K_2+\\
&\quad +[\alpha\gamma]A_3K_1+[\alpha\gamma]B_3K_2,\\
\xi y &= y-y_0 = [\alpha\beta]A_1K_1+[\alpha\beta]B_1K_2+[\beta\beta]A_2K_1+[\beta\beta]B_2K_2+\\
&\quad +[\beta\gamma]A_3K_1+[\beta\gamma]B_3K_2,\\
\xi z &= z-z_0 = [\alpha\gamma]A_1K_1+[\alpha\gamma]B_1K_2+[\beta\gamma]A_2K_1+[\beta\gamma]B_2K_2+\\
&\quad +[\gamma\gamma]A_3K_1+[\gamma\gamma]B_3K_2
\end{aligned}\right\} \qquad (386)$$

şi prin aceasta problema este complet rezolvată.

§ 143. Calculul sumei pătratelor erorilor aparente şi al erorii medii pătratice

Din formula (374)

$$[vv]=[v'v']+[v''v''] \qquad (387)$$

rezultă că putem calcula separat sumele $[v'v']$ şi $[v''v'']$ pentru cele două etape ale compensării; dar, pentru aceasta, nu este necesar

să calculăm separat pe toţi v'_i şi v''_i , ci putem deduce sumele indicate direct din ecuaţiile normale.

În ceea ce priveşte primul termen, acesta rezultă imediat din formula (117), § 116, extinsă la s necunoscute

$$[v'v'] = [ll \cdot s] = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cl \cdot 2]^2}{[cc \cdot 2]} - \frac{[dl \cdot 3]^2}{[dd \cdot 3]} - \dots , \qquad (388)$$

unde toţi termenii din membrul al doilea se calculează din coeficienţii ecuaţiilor normale (366) prin metoda reducerii dată de Gauss.

În ceea ce priveşte al doilea termen ($[v''v'']$, putem utiliza formula (273), § 131, prin corelate

$$[v''v''] = -[wK], \qquad (389)$$

sau, după formula (274),

$$[v''v''] = \frac{w_1^2}{[\text{III}]} + \frac{[w_2 \cdot 1]^2}{[\text{II II} \cdot 1]} + \frac{[w_3 \cdot 2]^2}{[\text{III III} \cdot 2]} + \dots , \qquad (390)$$

după numărul ecuaţiilor de condiţie, respectiv numărul ecuaţiilor (382). O altă formulă pentru $[v''v'']$ utilă în practică se obţine cu mărimile ajutătoare

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= A_1K_1 + B_1K_2 \\ \Omega_2 &= A_2K_1 + B_2K_2 \\ \Omega_3 &= A_3K_1 + B_3K_2 , \end{aligned}\right\} \qquad (391)$$

unde A, B sînt coeficienţii ecuaţiilor de condiţie (364), iar K_1, K_2 sînt corelate introduse în a doua compensare (382).

Din compensarea formulelor (385) şi (391) se verifică uşor că putem scrie

$$\left.\begin{aligned} v''_1 &= \alpha_1\Omega_1 + \beta_1\Omega_2 + \gamma_1\Omega_3 \\ v''_2 &= \alpha_2\Omega_1 + \beta_2\Omega_2 + \gamma_2\Omega_3 \\ v''_3 &= \alpha_3\Omega_1 + \beta_3\Omega_2 + \gamma_3\Omega_3 \\ v''_4 &= \alpha_4\Omega_1 + \beta_4\Omega_2 + \gamma_4\Omega_3 , \end{aligned}\right\} \qquad (392)$$

de unde rezultă imediat

$$\begin{aligned} [v''v''] = {} & [\alpha\alpha]\Omega_1\Omega_1 + 2[\alpha\beta]\Omega_1\Omega_2 + 2[\alpha\gamma]\Omega_1\Omega_3 + \\ & + [\beta\beta]\Omega_2\Omega_2 + 2[\beta\gamma]\Omega_2\Omega_3 + \\ & + [\gamma\gamma]\Omega_3\Omega_3 , \end{aligned}$$

Scanned with OKEN Scanner

relaţie care, comparată cu formulele (386), poate fi pusă sub forma

$$[v''v''] = \Omega_1 \cdot \delta x + \Omega_2 \cdot \delta y + \Omega_3 \cdot \delta z \tag{393}$$

sau, ordonată după corelate,

$$[v''v''] = (A_1 \delta x + A_2 \delta y + A_3 \delta z) K_1 + (B_1 \delta x + B_2 \delta y + B_3 \delta z) K_2. \tag{394}$$

Avînd astfel calculată suma $[vv]$, putem scrie valoarea erorii medii pătratice după formula (370)

$$m^2 = \frac{[vv]}{n-s+r} = \frac{[v'v'] + [v''v'']}{(n-s)+r}. \tag{395}$$

Pe de altă parte, dacă m_1 şi m_2 sînt erorile medii pătratice din prima şi a doua compensare

$$m_1^2 = \frac{[v'v']}{n-s}, \quad m_2^2 = \frac{[v''v'']}{r}, \tag{396}$$

observăm că eroarea medie pătratică totală m^2 nu se obţine din suma erorilor medii pătratice parţiale, care diferă de altfel şi între ele.

Diferenţa dintre cele două valori m_1 şi m_2 este o indicaţie asupra existenţei surselor de erori distincte în cele două etape de compensare.

§ 144. Ponderea unei funcţii, după compensarea necunoscutelor, în metoda compensării prin două etape

În § 132 ne-am ocupat de calculul ponderii unei funcţii de necunoscutele problemei, după ce aceste necunoscute au fost compensate prin metoda corelatelor. În cazul de faţă, al compensării în două etape, observăm că problema s-a redus la cea tratată în § 132, întrucît etapa a doua permite calculul coeficienţilor I, II, ... din ecuaţiile corelatelor (382), coeficienţi care permit formarea expresiei ponderii după formula (287).

Fie, aşadar, o funcţie

$$f = A_1 x + A_2 y + A_3 z \tag{397}$$

a cărei pondere P ne propunem s-o determinăm cînd x, y, z reprezintă valorile compensate (368); prin urmare,

$$f = A_1(x_0 + \delta x) + A_2(y_0 + \delta y) + A_3(z_0 + \delta z). \tag{398}$$

Problema va fi rezolvată dacă vom exprima funcţia f ca funcţie de $(l + v'')$, conform relaţiei (277). În acest scop, observăm că după

teoria dezvoltată la § 113, formula (47), putem exprima soluţiile primei compensări x_0, y_0, z_0, date de ecuaţiile (366), sub forma

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= -(\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 + \alpha_4 l_4) \\ y_0 &= -(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2 + \beta_3 l_3 + \beta_4 l_4) \\ z_0 &= -(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \gamma_3 l_3 + \gamma_4 l_4), \end{aligned}\right\} \qquad (399)$$

în acelaşi mod în care s-au construit ecuaţiile (379). Dar, adunînd ecuaţiile (399) cu ecuaţiile (379), obţinem

$$\begin{aligned} x_0 + \delta x &= \alpha_1(l_1 + v_1'') + \alpha_2(l_2 + v_2'') + \alpha_3(l_3 + v_3'') + \alpha_4(l_4 + v_4'') \\ y_0 + \delta y &= \beta_1(l_1 + v_1'') + \beta_2(l_2 + v_2'') + \beta_3(l_3 + v_3'') + \beta_4(l_4 + v_4'') \\ z_0 + \delta z &= \gamma_1(l_1 + v_1'') + \gamma_2(l_2 + v_2'') + \gamma_3(l_3 + v_3'') + \gamma_4(l_4 + v_4''). \end{aligned}$$

Introducînd aceste valori în expresia (398) a funcţiei f, deducem

$$f = B_1(l_1 + v_1'') + B_2(l_2 + v_2'') + B_3(l_3 + v_3'') + B_4(l_4 + v_4''), \qquad (400)$$

deci de forma (277), § 132, unde

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= A_1\alpha_1 + A_2\beta_1 + A_3\gamma_1 \\ B_2 &= A_1\alpha_2 + A_2\beta_2 + A_3\gamma_2 \\ B_3 &= A_1\alpha_3 + A_2\beta_3 + A_3\gamma_3 \\ B_4 &= A_1\alpha_4 + A_2\beta_4 + A_3\gamma_4. \end{aligned}\right\} \qquad (401)$$

După teoria compensării condiţionate (§ 132), formula (287) ne dă expresia ponderii funcţiei considerate. În cazul nostru, cu coeficienţii (401) în expresia lui f (400) şi cu coeficienţii I, II, ... în ecuaţiile corelatelor (382) în locul ecuaţiilor (282), expresia ponderii P a funcţiei (397) se scrie în forma generală

$$\frac{1}{P} = [BB] - \left\{ \frac{[\mathrm{I}\,B]^2}{[\mathrm{I}\,\mathrm{I}]} + \frac{[\mathrm{II}\,B\cdot 1]^2}{[\mathrm{II}\,\mathrm{II}\cdot 1]} + \frac{[\mathrm{III}\,B\cdot 2]^2}{[\mathrm{III}\,\mathrm{III}\cdot 2]} + \cdots, \right\} \qquad (402)$$

unde am extins expresia pentru cazul mai multor ecuaţii de condiţie. În această relaţie, termenul $[BB]$ reprezintă ponderea funcţiei după prima compensare, dar înainte de a doua compensare; aşadar, după formula (178), § 122, putem scrie

$$[BB] = \frac{A_1^2}{[aa]} + \frac{[A_2\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} + \frac{[A_3\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]} + \cdots, \qquad (403)$$

unde punctele ... se referă la cazul mai multor necunoscute.

§ 145. Determinări indirecte, cu ecuaţii de condiţie parţiale

Dacă ecuaţiile erorilor conţin necunoscute care nu figurează în ecuaţiile de condiţie, se pot aplica tot formulele stabilite anterior, căci putem presupune că coeficienţii corespunzători necunoscutelor care lipsesc din ecuaţiile de condiţie sînt nuli şi-i înlocuim deci cu zerouri.

Este comod pentru calcule să se folosească lipsa necunoscutelor chiar la prima compensare şi să eliminăm necunoscutele care lipsesc în ecuaţiile de condiţie chiar din ecuaţiile normale ale primei compensări.

Acest caz prezintă importanţă în problema compensării unei triangulaţii.

Să considerăm, deci, ecuaţiile erorilor în care, pentru simplificare, admitem că avem $s=2$ variabile care apar numai în ecuaţiile erorilor şi $r=3$ variabile care apar atît în ecuaţiile erorilor cît şi în ecuaţiile de condiţie. Fie deci ecuaţiile erorilor

$$\overset{n}{\text{ecuaţii}}\quad \begin{cases} h_1\xi+q_1\eta+a_1'x+b_1'y+c_1'z+l_1'+v_1' \\ h_2\xi+q_2\eta+a_2'x+b_2'y+c_2'z+l_2'=v_2' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underbrace{h_n\xi+q_n\eta}_{s=2}+\underbrace{a_n'x+b_n'y+c_n'z}_{r=3}+l_n'=v_n'. \end{cases} \tag{404}$$

Fie $t=2$ ecuaţii de condiţie, $t<r$,

$$t=2\ \begin{cases} A_1x+A_2y+A_3z+A_0=0 \\ \underbrace{B_1x+B_2y+B_3z}_{r=3}+B_0=0. \end{cases} \tag{405}$$

Cele $s=2$ necunoscute ξ şi η care figurează numai în ecuaţiile erorilor se numesc *corecţiile punctului zero* pentru reţelele individuale. Cum ele nu figurează în ecuaţiile de condiţie, acest fapt nu are nici o influenţă asupra primei compensări în care nu se ţine seama de ecuaţiile de condiţie, ci numai de ecuaţiile erorilor. Aşadar, procedăm la formarea ecuaţiilor normale pentru prima compensare, aşa cum s-a arătat în paragrafele precedente şi efectuăm eliminarea necunoscutelor ξ şi η care figurează numai în ecuaţiile erorilor, în număr de s. După această eliminare ne rămîne

Scanned with OKEN Scanner

un sistem de ecuații normale numai pentru necunoscutele x, y, z, sistem pe care-l putem scrie, pentru cazul de față ($s=2$), sub forma

$$\left.\begin{aligned}[a'a'\cdot 2]\,x+[a'b'\cdot 2]\,y+[a'c'\cdot 2]\,z+[a'l'\cdot 2]&=0\\ [a'b'\cdot 2]\,x+[b'b'\cdot 2]\,y+[b'c'\cdot 2]\,z+[b'l'\cdot 2]&=0\\ [a'c'\cdot 2]\,x+[b'c'\cdot 2]\,y+[c'c'\cdot 2]\,z+[c'l'\cdot 2]&=0,\end{aligned}\right\} \tag{406}$$

de unde, după o proprietate demonstrată anterior,

$$[l'l'\cdot 2]=[v_0v_0]. \tag{407}$$

Să scriem ecuațiile (406) sub forma

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]&=0\\ [bb]\,y+[bc]\,z+[bl]&=0\\ [cc]\,z+[cl]&=0\\ [ll]&=[v_0v_0],\end{aligned}\right\} \tag{408}$$

unde am pus $[aa]=[a'a'\cdot 2]$ etc., astfel încît cu noii coeficienți astfel introduși putem calcula ca și cu coeficienții $[aa]$ etc. din prima compensare.

Suma pătratelor $[v_0v_0]$ care figurează în ecuațiile (407) și (408) se reduce, treptat, la suma $[v'v']$ care figurează în ecuațiile inițiale, prin relația cunoscută [§ 116, formula (117)]

$$[v'v']=[v_0v_0]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]}-\frac{[cl\cdot 2]^2}{[cc\cdot 2]}-\ldots, \tag{409}$$

unde numărul de termeni din membrul al doilea depinde de numărul necunoscutelor.

În modul acesta, eroarea medie pătratică a primei compensări este, după formula cunoscută,

$$m_1=\pm\sqrt{\frac{[v'v']}{n-(s+r)}}, \tag{410}$$

căci numărul necunoscutelor este $s+r$.

§ 146. Ecuațiile erorilor cu mai multe mărimi măsurate

În problemele tratate pînă acum am considerat numai cazul în care în fiecare ecuație a erorilor figura o singură mărime observată direct, în afară de necunoscutele care erau tratate ca mărimi determinabile indirect, și numai cîte o singură corecție corespunzătoare mărimii măsurate direct.

În cazul general, însă, problema compensării conduce la ecuații ale erorilor cu mai multe mărimi măsurate direct și la ecuații de

Scanned with OKEN Scanner

condiție cu mai multe necunoscute. Acest fel de probleme este pus de exemplu de practica geodezică, cum este problema eliminării necunoscutelor de orientare cînd se măsoară direcții, în care figurează două mărimi observate direct. Se pune problema compensării în astfel de cazuri. Vom începe prin tratarea unui caz particular în care ecuațiile erorilor conțin diferențele erorilor

$$\left.\begin{array}{l} a_2x+b_2y+c_2z+\ldots+l_2=v_2-v_1 \\ a_3x+b_3y+c_3z+\ldots+l_3=v_3-v_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{a_nx+b_ny+c_nz}_{s \text{ necunoscute}}+\ldots+l_n=v_n-v_1. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n-1 \\ \text{ecuații} \end{array} \qquad (411)$$

În locul acestui sistem de $(n-1)$ ecuații cu s necunoscute, să introducem un sistem de n ecuații cu $s+1$ necunoscute, considerînd pe v_1 drept o nouă necunoscută. În acest mod, putem forma sistemul de n ecuații cu $s+1$ necunoscute, astfel încît să fie satisfăcută condiția inerentă ecuațiilor erorilor: $n>s+1$. Avem, pentru $s=3$ necunoscute (în vederea simplificării scrisului)

$$\left.\begin{array}{l} v_1+0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0=v_1 \\ v_1+a_2x+b_2y+c_2z+l_2=v_2 \\ v_1+a_3x+b_3y+c_3z+l_3=v_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{v_1+a_nx+b_ny+c_nz}_{n>s+1=4.}+l_n=v_n \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} n \\ \text{ecuații} \end{array} \qquad (412)$$

Ecuațiile normale corespunzătoare acestor ecuații de erori sînt

$$\left.\begin{array}{rrrrr} n\,v_1+ & [a]x+ & [b]y+ & [c]z+ & l=0 \\ [a]v_1+ & [aa]x+ & [ab]y+ & [ac]z+ & [al]=0 \\ [b]v_1+ & [ab]x+ & [bb]y+ & [bc]z+ & [bl]=0 \\ [c]v_1+ & [ac]x+ & [bc]y+ & [cc]z+ & [cl]=0. \end{array}\right\} \qquad (413)$$

Eliminarea necunoscutei auxiliare v_1 prin metoda Gauss obișnuită conduce la sistemul care conține numai pe x, y și z

$$\left.\begin{array}{l} \left([aa]-\frac{[a]}{n}[a]\right)x+\left([ab]-\frac{[a]}{n}[b]\right)y+\left([ac]-\frac{[a]}{n}[c]\right)z+\left([al]-\frac{[a]}{n}[l]\right)=0 \\ \left([bb]-\frac{[b]}{n}[b]\right)y+\left([bc]-\frac{[b]}{n}[c]\right)z+\left([bl]-\frac{[b]}{n}[l]\right)=0 \\ \left([cc]-\frac{[c]}{n}[c]\right)z+\left([cl]-\frac{[c]}{n}[l]\right)=0. \end{array}\right\} \qquad (414)$$

Scanned with OKEN Scanner

Acest sistem rezolvă problema, reducînd-o la un sistem obişnuit de ecuaţii normale cu necunoscutele propriu-zise x, y, z.

Cazul general. Ecuaţiile erorilor se pot prezenta în următoarea formă generală

$$\left.\begin{array}{l} a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\ldots+a_nv_n+A_1x+B_1y+C_1z+w_a=0 \\ b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\ldots+b_nv_n+A_2x+B_2y+C_2z+w_b=0 \\ c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\ldots+c_nv_n+A_3x+B_3y+C_3z+w_c=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \underbrace{r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\ldots+r_nv_n}_{n\text{ măsurători}}+\underbrace{A_rx+B_ry+C_rz}_{s=3\text{ necunoscute}}+w_r=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n \\ \text{ecuaţii} \end{array} \qquad (415)$$

unde avem satisfăcute relaţiile $r>s$; $n>r-s$.

În aceste ecuaţii, mărimile v_1, v_2, ..., v_n sînt corecţiile observaţiilor a căror sumă de pătrate trebuie să fie minimă în problema de compensare

$$[vv]=\text{minimă}.$$

Necunoscutele sînt x, y, z, ...; în cazul de faţă $s=3$ necunoscute. Pentru $r=s$ problema compensării are o soluţie riguroasă, întrucît toate valorile v_i trebuie să fie nule, iar cele $r=s$ ecuaţii cu tot atîtea necunoscute se pot rezolva riguros, algebric.

Are deci sens să vorbim de compensare numai pentru $r>s$: numărul ecuaţiilor să fie mai mare decît numărul necunoscutelor propriu-zise.

Putem alege atunci $s<r$ ecuaţii din cele r date şi să le rezolvăm exprimînd cele s necunoscute propriu-zise, x, y, z, ..., în funcţie de cele n necunoscute auxiliare v_1, v_2, ..., v_n, În aceste condiţii, rămîn încă $r-s<n$ ecuaţii de condiţie între corecţiile v_1, v_2, ..., v_n.

Prin aceasta, problema este terminată. Eoarea medie pătratică este atunci

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{r-s}}. \qquad (416)$$

Rezolvarea directă. Problema propusă în acest paragraf poate să fie tratată şi direct prin condiţia de minim al sumei $[vv]$ sub condiţia satisfacerii relaţiilor (415), prin metoda coeficienţilor nede-

terminaţi care sînt, precum ştim, corelatele K_a, K_b, K_c, $\cdots$, K_r. Avem, aşadar, condiţia ca funcţia

$$\left.\begin{aligned}
&[vv]-2K_a(a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3+\cdots+a_nv_n+A_1x+B_1y+C_1z+w_a)-\\
&-2K_b(b_1v_1+b_2v_2+b_3v_3+\cdots+b_nv_n+A_2x+B_2y+C_2z+w_b)-\\
&-2K_c(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3+\cdots+c_nv_n+A_3x+B_3y+C_3z+w_c)-\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-2K_r(r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+\cdots+r_nv_n+A_rx+B_ry+C_rz+w_r)=\\
&=\text{minimă}.
\end{aligned}\right\} \qquad (417)$$

După principiul variaţional cunoscut, trebuie să egalăm cu zero derivatele expresiei (417) în raport cu v_1, v_2, $\ldots$, v_n; x, y, z, $\ldots$ Obţinem astfel $n+s$ ecuaţii, care, împreună cu cele r ecuaţii (415), sînt suficiente pentru determinarea celor n condiţii v_1, v_2, $\ldots$, v_n a celor r corelate K_a, K_b, K_c, $\cdots$, K_r şi a celor s necunoscute x, y, z, $\ldots$

Derivarea în raport cu v_1, v_2, $\ldots$, v_n ne dă ecuaţiile

$$n \text{ ecuaţii} \quad \left\{\begin{aligned}
&v_1-a_1K_a-b_1K_b-c_1K_c-\cdots-r_1K_r=0\\
&v_2-a_2K_a-b_2K_b-c_2K_c-\cdots-r_2K_r=0\\
&v_3-a_3K_a-b_3K_b-c_3K_c-\cdots-r_3K_r=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&v_n-a_nK_a-b_nK_b-c_nK_c-\cdots-r_nK_r=0,
\end{aligned}\right. \qquad (418)$$

Derivarea în raport cu x, y, z ne dă ecuaţiile

$$s=3 \text{ ecuaţii} \quad \left\{\begin{aligned}
&A_1K_a+A_2K_b+A_3K_c+\cdots+A_rK_r=0\\
&B_1K_a+B_2K_b+B_3K_c+\cdots+B_rK_r=0\\
&C_1K_a+C_2K_b+C_3K_c+\cdots+C_rK_r=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right. \qquad (419)$$

Sistemele (418) şi (419) corespund ecuaţiilor corelatelor în problema compensării observaţiilor condiţionate. Dacă introducem valorile lui v_1, v_2, $\ldots$, v_n din (418) în ecuaţiile (415) şi luăm în considerare şi ecuaţiile (419), obţinem sistemul

$$\left.\begin{aligned}
&[aa]K_a+[ab]K_b+[ac]K_c+\cdots+A_1x+B_1y+C_1z+w_a=0\\
&[ab]K_a+[bb]K_b+[bc]K_c+\cdots+A_2x+B_2y+C_2z+w_b=0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_1K_a+A_2K_b+A_3K_c+\cdots\cdots\cdots\cdots=0\\
&B_1K_a+B_2K_b+B_3K_c+\cdots\cdots\cdots\cdots=0\\
&C_1K_a+C_2K_b+C_3K_c+\cdots\cdots\cdots\cdots=0.
\end{aligned}\right\} \qquad (420)$$

Scanned with OKEN Scanner

Aceste ecuații normale pot fi rezolvate prin metoda eliminării după Gauss, astfel încît să fie eliminate toate corelatele K_a, K_b, ...; rămîn astfel numai trei ecuații (respectiv s ecuații)

$$\left.\begin{aligned}
\{AA\}x+\{AB\}y+\{AC\}z-\{Aw\}=0\\
\{AB\}x+\{BB\}y+\{BC\}z-\{Bw\}=0\\
\{AC\}x+\{BC\}y+\{CC\}z-\{Cw\}=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (421)$$

care constituie un sistem de ecuații normale pentru necunoscutele x, y, z; din ele se pot obține necunoscutele și corecțiile lor prin metoda compensării observațiilor indirecte.

Caz particular. Fiecare corecție figurează numai într-o singură ecuație din sistemul (415). Pentru simplificarea scrisului admitem că avem numai două corecții și numai două necunoscute x și y. Ecuațiile (415) devin în aceste condiții

$$\left.\begin{aligned}
&a_1v_1+a_1'v_1'+\ldots\ldots+A_1x+B_1y+w_a=0\\
&\ldots b_2v_2+b_2'v_2'+\ldots+A_2x+B_2y+w_b=0\\
&\ldots\ldots\ldots c_3v_3+c_3'v_3'+A_3x+B_3y+w_c=0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (422)$$

Ecuațiile normale corespunzătoare acestui sistem sînt

$$\left.\begin{aligned}
(a_1^2+a_1'^2)K_a+A_1x+B_1y+w_a=0\\
(b_2^2+b_2'^2)K_b+A_2x+B_2y+w_b=0\\
(c_3^2+c_3'^2)K_c+A_3x+B_3y+w_c=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (423$$

sau

$$\left.\begin{aligned}
K_a&=-\frac{A_1}{a_1^2+a_1'^2}x-\frac{B_1}{a_1^2+a_1'^2}y-\frac{w_a}{a_1^2+a_1'^2}\\
K_b&=-\frac{A_2}{b_2^2+b_2'^2}x-\frac{B_2}{b_2^2+b_2'^2}y-\frac{w_b}{b_2^2+b_2'^2}\\
K_c&=-\frac{A_3}{c_2^2+c_3'^2}x-\frac{B_3}{c_3^2+c_3'^2}y-\frac{w_c}{c_3^2+c_3'^2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (424)$$

Pentru simplificare notăm

$$\frac{1}{a_1^2+a_1'^2}=p_1,\ \frac{1}{b_2^2+b_2'^2}=p_2,\ \frac{1}{c_3^2+c_3'^2}=p_3,\ldots \qquad (425)$$

Dacă introducem valorile (424) și (425) în ecuațiile (423), obținem

$$\left.\begin{aligned}[AAp]x+[ABp]y+[Awp]=0\\ [ABp]x+[BBp]y+[Bwp]=0.\end{aligned}\right\} \tag{426}$$

Acest sistem de ecuații normale poate fi obținut și pe o cale mult mai simplă. În adevăr, punînd ca expresii noi ale corecțiilor

$$\left.\begin{aligned}&a_1v_1+a_1'v_1'=-\lambda_1, \text{ cu ponderea } p_1\\ &b_2v_2+b_2'v_2'=-\lambda_2, \text{ cu ponderea } p_2\\ &c_3v_3+c_3'v_3'=-\lambda_3, \text{ cu ponderea } p_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{427}$$

ecuațiile (422) se pot scrie ca ecuații de corecții

$$\left.\begin{aligned}&A_1x+B_1y+w_a=\lambda_1, \text{ cu ponderea } p_1\\ &A_2x+B_2y+w_b=\lambda_2, \text{ cu ponderea } p_2\\ &A_3x+B_3y+w_c=\lambda_3, \text{ cu ponderea } p_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{428}$$

ale căror ecuații normale sînt tocmai ecuațiile (426).

Corecțiile se deduc din ecuațiile (418)

$$\left.\begin{aligned}&v_1=a_1K_a, \quad v_1'=a_1K_a,\\ &v_2=b_2K_b, \quad v_2'=b_2'K_b,\\ &v_3=c_3K_c, \quad v_3'=c_3'K_c,\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{429}$$

astfel încît, după (427) și (425), deducem valorile corelatelor

$$\left.\begin{aligned}&a_1^2K_a+a_1'^2K_a=-\lambda_1, \quad K_a=-\lambda_1p_1,\\ &b_2^2K_b+b_2'^2K_b=-\lambda_2, \quad K_b=-\lambda_2p_2,\\ &c_3^2K_c+c_3'^2K_c=-\lambda_3, \quad K_c=-\lambda_3p_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{430}$$

iar după (429) rezultă corecțiile

$$\left.\begin{aligned}&v_1=-a_1p_1\lambda_1, \quad v_1'=-a_1'p_1\lambda_1,\\ &v_2=-b_2p_2\lambda_2, \quad v_2'=-b_2'p_2\lambda_2,\\ &v_3=-c_3p_3\lambda_3, \quad v_3'=-c_3'p_3\lambda_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \tag{431}$$

Scanned with OKEN Scanner

Eroarea medie pătratică se poate scrie

$$m=\pm\sqrt{\frac{[vv]+[v'v']}{r-s}},\quad m=\pm\sqrt{\frac{[\lambda\lambda p]}{r-s}}, \tag{432}$$

identitatea acestor două formule fiind evidentă.

Din ecuațiile erorilor (428) pot fi calculate ponderile necunoscutelor x și y, precum și erorile lor medii pătratice.

Exemplu de aplicație a condițiilor precedente: determinarea grafică a unei drepte, într-un plan, dacă se măsoară coordonatele mai multor puncte ale acestei drepte.

Să admitem că, raportînd dreapta în plan la un sistem de coordonate dat, am măsurat cu ajutorul coordonatografului 10 puncte ale unei drepte. Aceste măsurători se introduc în formulele noastre drept mărimi l, l'; de exemplu, abscise și ordonate. Fie deci rezultatul măsurătorilor

	l,mm	l',mm		l,mm	l',mm
1	+ 55,58	+40,50	6	+115,80	+67,54
2	+ 68,50	+46,46	7	+120,05	+69,50
3	+ 78,00	+50,70	8	+130,18	+74,00
4	+ 95,44	+52,51	9	+144,40	+80,55
5	+115,80	+58,52	10	+154,50	+84,98.

(433)

Ca ecuație a dreptei luăm expresia

$$x=(l+v)+(l'+v')\operatorname{ctg}\theta=0, \tag{434}$$

unde am însemnat prin x segmentul interceptat pe axa absciselor de dreaptă și prin θ unghiul format de dreaptă cu axa absciselor; v și v' sînt corecțiile acestor două coordonate.

Relația de condiție (434) este complicată, atît prin faptul că mărimea observată l' și corecția ei v' intră ca factori în expresia termenului cu ctg θ, dar mai ales că funcția necunoscută θ ea însăși nu figurează liniar în ecuație. Această dificultate se elimină, iar calculul se simplifică, dacă se iau valori aproximative convenabile atît pentru mărimile măsurate cît și pentru mărimile necunoscute. Să punem

$$\left.\begin{aligned} x&=(x)+\Delta x, & \theta&=(\theta)+\Delta\theta,\\ l_1&=(l_1)+\Delta l_1, & l'_1&=(\theta_1)+\Delta l'_1,\\ l_2&=(l_2)+\Delta l_2, & l'_2&=(\theta_2)+\Delta l'_2,\\ &\cdots\cdots & &\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{435}$$

astfel încît putem scrie dezvoltînd în serie Taylor

$$\operatorname{ctg}\theta=\operatorname{ctg}(\theta)-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\Delta\theta, \tag{436}$$

oprindu-ne în dezvoltare numai la termenii liniari.

În aceste condiții, ecuația (434) devine

$$(x)-(l)+(l')\operatorname{ctg}(\theta)-\Delta l+\operatorname{ctg}(\theta)\cdot\Delta l'+\Delta x-\frac{l'}{\sin^2(\theta)}\Delta\theta-v+\operatorname{ctg}(\theta)\,v'=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Să punem

$$\left.\begin{aligned} -\Delta l+\operatorname{ctg}(\theta)\cdot\Delta l'&=-w\,,\\ -v+\operatorname{ctg}(\theta)\cdot v'&=-\lambda\,,\quad \text{ponderea } p=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\theta}=\sin^2\theta \end{aligned}\right\} \tag{437}$$

și să alegem valorile aproximative astfel încît să fie satisfăcută relația

$$(x)-(l)+(l')\operatorname{ctg}(\theta)=0\,. \tag{438}$$

În aceste condiții, ecuația erorilor devine

$$\lambda=-w+\Delta x-(l')\frac{1}{\sin^2(\theta)}\Delta\theta\,,\quad p=\sin^2\theta\,. \tag{439}$$

În primul rînd, trebuie alese valorile aproximative convenabile pentru a satisface ecuația (438); în acest scop, scriem ecuația (438) sub forma

$$(x)\operatorname{tg}(\theta)-l\operatorname{tg}(\theta)+l'=0 \tag{440}$$

și alegem ca valoare aproximativă

$$(\theta)=24°10'\,. \tag{441}$$

Cu această valoare aproximativă calculăm expresia $l'-l\operatorname{tg}\theta$, care figurează în ecuația (470). Media valorilor acestor mărimi pentru toate punctele o punem egală cu $-(x)\operatorname{tg}(\theta)$ după (470). Cu această valoare a lui $(x)\operatorname{tg}(\theta)$ și cu valorile lui $(l)\operatorname{tg}\theta$, calculate anterior, calculăm valorile aproximative corespunzătoare ale lui l', precum și corecțiile $\Delta l'$, luînd $\Delta l=0$ [căci punem pentru simplificare $(l)=l$]. Tabela următoare ne dă elementele necesare pentru acest calcul.

$$(\theta)=24°10'$$

	$l\operatorname{tg}(\theta)$	$l'-l\operatorname{tg}(\theta)$	l'	$\Delta l'$
1	+24,94	+15,56	+40,59	−0,09
2	+30,74	+15.66	+46,39	+0,01
3	+35,00	+15,70	+50,65	+0,05
4	+36,86	+15,65	+52,51	+0,00
5	+42,82	+15,70	+58,47	+0,05
6	+51,96	+15,58	+67,61	−0,07
7	+53,87	+15,63	+69,52	−0,02
8	+58,41	+15,59	+74,06	−0,06
9	+64,79	+15,76	+80,44	+0,11
10	+69,33	+15,65	+84,98	0,00

Valoarea medie: $+15{,}648=-(x)\operatorname{tg}(\theta)$. $x=-34{,}873$ mm

Scanned with OKEN Scanner

Ecuațiile erorilor (439) devin atunci, după (437),

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0{,}09\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 40{,}59\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_2 &= +0{,}01\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 46{,}39\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_3 &= +0{,}05\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 50{,}65\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_4 &= \ \ 0{,}00\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 52{,}51\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_5 &= +0{,}05\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 58{,}47\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_6 &= -0{,}07\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 67{,}61\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_7 &= -0{,}02\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 69{,}52\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_8 &= -0{,}06\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 74{,}06\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_9 &= +0{,}11\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 80{,}44\cdot\Delta\theta,\\
\lambda_{10} &= \ \ 0{,}00\ \operatorname{ctg}(\theta)+\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\cdot 84{,}98\cdot\Delta\theta.
\end{aligned}\right\}\qquad (442)$$

Ponderea $p=\sin^2(\theta)$.

Înainte de a trece la formarea ecuațiilor normale corespunzătoare sistemului (442), formăm ecuațiile erorilor reduse, care se obțin prin eliminarea lui Δx. În acest scop, avem nevoie de prima ecuație normală a sistemului (442); aceasta este, după regula cunoscută,

$$0=0+10\,\Delta x-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,625{,}22\cdot\Delta\theta$$

sau ceea ce este tot una,

$$0=0-\Delta x+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,62{,}52\cdot\Delta\theta. \qquad (443)$$

Folosind ecuația (443), ecuațiile erorilor reduse devin

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_1 &= -0{,}09\ \operatorname{ctg}(\theta)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,21{,}93\cdot\Delta\theta\\
\lambda_2 &= +0{,}01\ \operatorname{ctg}(\theta)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,16{,}13\cdot\Delta\theta\\
\lambda_3 &= +0{,}05\ \operatorname{ctg}(\theta)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,11{,}87\cdot\Delta\theta\\
\lambda_4 &= \ \ 0{,}00\ \operatorname{ctg}(\theta)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,10{,}01\cdot\Delta\theta\\
\lambda_5 &= +0{,}05\ \operatorname{ctg}(\theta)+\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,4{,}05\cdot\Delta\theta\\
\lambda_6 &= -0{,}07\ \operatorname{ctg}(\theta)-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,5{,}09\cdot\Delta\theta\\
\lambda_7 &= -0{,}02\ \operatorname{ctg}(\theta)-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,7{,}00\cdot\Delta\theta\\
\lambda_8 &= -0{,}06\ \operatorname{ctg}(\theta)-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,11{,}54\cdot\Delta\theta\\
\lambda_9 &= +0{,}11\ \operatorname{ctg}(\theta)-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,17{,}92\cdot\Delta\theta\\
\lambda_{10} &= \ \ 0{,}00\ \operatorname{ctg}(\theta)-\frac{1}{\sin^2(\theta)}\,22{,}46\cdot\Delta\theta
\end{aligned}\right\}\qquad(444)$$

Ponderea $p=\sin^2(\theta)$.
Din acest sistem obținem ecuația normală

$$2032{,}26\frac{1}{\sin^2(\theta)}\Delta\theta-1{,}7989\ \operatorname{ctg}(\theta)=0\,,\qquad(445)$$

de unde rezultă

$$\Delta\theta=0{,}00033063\,,\quad \Delta\theta=68{,}2''\,.\qquad(446)$$

Rezultă din (443)

$$\Delta x=+0{,}123\ \text{mm}\,,\qquad(447)$$

astfel încît valorile necunoscutelor θ și x sînt

$$\theta=24^\circ11'03{,}2''\,,\qquad x=-34{,}750\ \text{mm}.\qquad(448)$$

Valorile lui λ se calculează din ecuațiile erorilor (444), iar pentru fiecare valoare a corecțiilor avem ,după formulele (431),

$$v=+\lambda\sin^2(\theta)\,,\qquad v'=-\lambda\sin(\theta)\cos(\theta)\,,$$

sau

$$v=+0{,}1676\cdot\lambda\,,\qquad v'=-0{,}3735\,\lambda\,.\qquad(449)$$

Cu aceste date putem forma tabela elementelor care ne dă eroarea medie pătratică.

	λ, mm	λ^2	v, mm	v^2	v', mm	v'^2
1	−0,16	0,0256	−0,03	0,0009	+0,06	0,0036
2	+0,05	0,0025	+0,01	0,0001	−0,02	0,0004
3	+0,13	0,0169	+0,02	0,0004	−0,05	0,0025
4	+0,02	0,0004	0,00	0,0000	−0,01	0,0001
5	+0,12	0,0144	+0,02	0,0004	−0,04	0,0016
6	−0,17	0,0289	−0,03	0,0009	+0,06	0,0036
7	−0,05	0,0025	−0,01	0,0001	+0,02	0,0004
8	−0,15	0,0225	−0,03	0,0009	+0,06	0,0036
9	+0,20	0,0400	+0,03	0,0009	−0,07	0,0049
10	−0,04	0,0016	−0,01	0,0001	+0,01	0,0001
		0,1553		0,0047		0,0208

$$[\lambda\lambda\, p]=0{,}0260\,, \qquad [vv]+[v'v']=0{,}0255\,.$$

După formulele (432) deducem pentru eroarea medie pătratică

$$m=\pm\sqrt{\frac{0{,}0260}{10-2}}=\pm 0{,}057 \text{ mm}.$$

Ecuația normală (445) ne dă totodată și ponderea

$$p_\theta=\frac{2032{,}26}{\sin^2(\theta)}\,, \qquad m_\theta=\pm 0{,}000518 \quad \text{sau} \quad m_\theta=\pm 106{,}8''. \tag{450}$$

Formînd din ecuațiile (444) coeficienții $[aa]$, $[ab]$, $[bb]$, găsim imediat ponderea și eroarea medie pătratică

$$p_x=0{,}0828\,, \qquad m_x=\pm 0{,}198 \text{ mm}. \tag{451}$$

Ca rezultat al compensării se obține, prin urmare, următoarea ecuație a dreptei

$$(-34{,}750\pm 0{,}198)-X+(2{,}2266\pm 0{,}0031)\,Y=0\,, \tag{452}$$

unde X și Y sînt coordonatele curente ale punctelor de pe dreaptă (ale căror valori au fost măsurate prin l, respectiv l'). După (448) și (451) avem $x=34{,}750\pm 0{,}198$, care este termenul liber din ecuația (452), iar coeficientul lui Y este dat de $\operatorname{ctg}(24°11'08{,}2''\pm 106{,}8'')$.

Scanned with OKEN Scanner

§ 147. Eroarea medie pătratică într-un punct și elipsa erorilor

În problema determinării coordonatelor unui punct din măsurători se deduce și precizia acestei determinări, după cum știm, din erorile medii pătratice ale coordonatelor punctului m_x, m_y avînd de-a face cu o problemă plană; acestea depind de alegerea sistemului de coordonate (x, y) și își schimbă valorile cînd se efectuează o rotație a sistemului de coordonate, ceea ce produce a neunivocitate în aprecierea preciziei rezultatelor. Este indicat, deci, să găsim un criteriu pentru determinarea acestei precizii, independent de alegerea sistemului de coordonate, sau un mijloc de a determina gradul de exactitate al acestei precizii.

Fie, așadar, pentru determinarea unui punct de coordonate (x, y), prin măsurătorile $l_1, l_2, \ldots, l_n$ în număr suficient de mare, cu erorile aparente corespunzătoare $v_1, v_2, \ldots, v_n$, *ecuațiile erorilor*

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1x+b_1y+l_1\\ v_2 &= a_2x+b_2y+l_2\\ v_3 &= a_3x+b_3y+l_3\\ &\cdots\cdots\cdots\\ v_n &= a_nx+b_ny+l_n. \end{aligned}\right\} \tag{453}$$

Ecuațiile normale corespunzătoare sînt

$$\left.\begin{aligned} [aa]x+[ab]y+[al]&=0\\ [ab]x+[bb]y+[bl]&=0 \end{aligned}\right\} \tag{454}$$

care rezolvate ne dau

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1}{D}\{[bb][al]-[ab][bl]\}\\ y &= \frac{1}{D}\{[aa][bl]-[ab][al]\}\\ D &= \begin{vmatrix}[aa] & [ab]\\ [ab] & [bb]\end{vmatrix} = [aa][bb]-[ab]^2. \end{aligned}\right\} \tag{455}$$

Prin urmare, eroarea medie pătratică a unei măsurători de unghi sau direcție este dată de formula cunoscută

$$m = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-r}}, \tag{456}$$

unde n este numărul ecuațiilor erorilor și r numărul necunoscutelor.

Scanned with OKEN Scanner

Fie $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$, erorile reale ale observaţiilor $l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n$; erorile reale Δ_x, Δ_y pentru determinarea coordonatelor punctului (x, y) se deduc din (455)

$$x+\Delta_x=\frac{1}{D}\{[bb][a(l+\Delta l)]-[ab][b(l+\Delta l)]\}$$

$$y+\Delta_y=\frac{1}{D}\{[aa][b(l+\Delta l)]-[ab][a(l+\Delta l)]\}.$$

Scăzînd aceste ultime relaţii din (455), obţinem

$$\left.\begin{aligned}\Delta_x&=\frac{1}{D}\{(a_1[bb]-b_1[ab])\Delta_1+(a_2[bb]-b_2[ab])\Delta_2+\cdots\}\\ \Delta_y&=\frac{1}{D}\{(b_1[aa]-a_1[ab])\Delta_1+(b_2[aa]-a_2[ab])\Delta_2+\cdots\}.\end{aligned}\right\} \quad (457)$$

Dacă, prin procedeul cunoscut al propagării erorilor, introducem relaţia dintre erorile reale şi erorile aparente, deducem din (457), pentru erorile medii pătratice ale coordonatelor, expresiile următoare în funcţie de eroarea m (456)

$$m_x^2=\frac{1}{D^2}\{[aa][bb]^2+[bb][ab]^2-2[ab]^2[bb]\}m^2$$

$$m_y^2=\frac{1}{D^2}\{[bb][aa]^2+[aa][ab]^2-2[ab]^2[aa]\}m^2,$$

de unde rezultă

$$m_x^2=\frac{[bb]}{D}m^2, \qquad m_y=\frac{[aa]}{D}m^2. \quad (458)$$

§ 148. Eroarea medie pătratică a punctului

Erorile Δ_x şi Δ_y definesc grafic o translaţie a punctului $P(x, y)$ de mărime

$$\Delta_p^2=\Delta_x^2+\Delta_y^2, \quad (459)$$

mărime care ne dă eroarea adevărată a punctului. Să introducem în (459) valorile lui Δ_x şi Δ_y din (457); rezultă

$$\Delta_p^2=\frac{1}{D^2}[\{a_1^2([bb]^2+[ab]^2)+b_1^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_1b_1[ab]([bb]+[aa])\}\Delta_1^2+$$
$$+\{a_2^2([bb]^2+[ab]^2)+b_2^2([aa]^2+[ab]^2)-2a_2b_2[ab](bb]+[aa])\}\Delta_2^2+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+A_{12}\Delta_1\Delta_2+A_{13}\Delta_1\Delta_3+\cdots],$$

unde prin $A_{12}, A_{13}, \ldots$ am indicat coeficienţii produselor $\Delta_i\Delta_j$

Formăm valorile medii ale valorilor mărimilor care figurează în ecuaţia precedentă. Obţinem

$$M_p^2=\frac{1}{D^2}\{[aa]([bb]^2+[ab]^2)+[bb]([aa]^2+[ab]^2)-2[ab]^2([bb]+[aa])\}m^2$$

sau

$$M_p^2=\frac{[aa]+[bb]}{D}m^2. \qquad (460)$$

Avînd în vedere expresiile (458), relaţia (460) devine

$$M_p^2=m_x^2+m_y^2. \qquad (461)$$

Este uşor de verificat că expresia (460) a erorii medii pătratice a punctului este independentă de direcţia axelor de coordonate. Să exprimăm coordonatele rectangulare (x, y) ale punctului în coordonate polare (ρ, φ)

$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi,$$

de unde se deduce uşor prin diferenţiere şi eliminarea lui $d\rho$

$$d\varphi=-\frac{\sin\varphi}{\rho}\varkappa\,dx+\frac{\cos\varphi}{\rho}\varkappa\,dy, \qquad (462)$$

unde am înmulţit cu factorul $\varkappa=206\,265$ pentru transformarea unităţii de măsură pentru un unghi în secunde. Formula (462) are expresia ecuaţiei erorilor, cu

$$a=-\frac{\sin\varphi}{\rho}\varkappa, \qquad b=\frac{\cos\varphi}{\rho}\varkappa. \qquad (463)$$

Introducînd aceste expresii ale lui a şi b în numărătorul lui (460) obţinem

$$[aa]+[bb]=\varkappa^2\left(\frac{1}{\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_2^2}+\cdots\right),$$

ceea ce constituie o expresie independentă de direcţiile axelor de coordonate definite prin unghiul φ. Trebuie să mai arătăm că şi numitorul D este independent de unghiul φ. Scriind explicit expresia determinantului D din (455), avem, aplicînd formula lui Lagrange,

$$D=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{j=1}^{n}b_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2=\sum_{i\neq j=1}^{n}(a_ib_j-a_jb_i)^2,$$

sau, cu valorile lui a şi b din (463),

$$D=\varkappa^2\sum_{i\neq j=1}^{n}\frac{\sin^2(\varphi_j-\varphi_i)}{\rho_i^2\rho_j^2}, \qquad (464)$$

ceea ce demonstrează proprietatea de independenţă a lui D de unghiul φ, deoarece în expresia precedentă a lui D nu figurează decît diferenţele dintre aceste unghiuri.

Scanned with OKEN Scanner

§ 149. Curba erorilor. Elipsa erorilor

Mărimile m_x, m_y ne dau erorile medii pătratice ale abaterilor medii ale punctului din cauza erorilor de măsurare, în ceea ce priveşte direcţiile axelor de coordonate date. Este necesar să se calculeze valorile acestor abateri relative şi la alte direcţii şi să se studieze în ce direcţii aceste abateri au valori extremale (maxime sau minime).

Cum determinantul D este invariant faţă de rotaţia axelor de coordonate, pentru a afla variaţia mărimilor (458) pentru astfel de rotaţii ale axelor este suficient să studiem comportarea mărimilor $[aa]$ şi $[bb]$ care figurează în numărătorii expresiilor (458).

Fie, deci, un nou sistem de coordonate rotit cu unghiul ψ faţă de primul. Avem, atunci, după (463),

$$a' = -\frac{\varkappa}{\rho}\sin(\varphi+\psi), \qquad b' = +\frac{\varkappa}{\rho}\cos(\varphi+\psi), \tag{465}$$

astfel încît

$$[a'a'] = \varkappa^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\sin^2(\varphi_i+\psi)}{\rho_i^2},$$

sau

$$[a'a'] = \varkappa^2\left\{\left[\frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\right]\cos^2\psi + \left[\frac{\cos^2\varphi}{\rho^2}\right]\sin^2\psi + 2\left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\right]\sin\psi\cos\psi\right\}$$

şi, după (463),

$$[a'a'] = [aa]\cos^2\psi + [bb]\sin^2\psi + [ab]\sin 2\psi; \tag{466}$$

în mod analog

$$[b'b'] = [bb]\cos^2\psi + [aa]\sin^2\psi - [ab]\sin 2\psi. \tag{467}$$

Pentru a determina valorile lui ψ pentru care expresiile (466) şi (467) sînt minime, trebuie să derivăm expresiile în raport cu ψ. Obţinem

$$\frac{d[a'a']}{d\psi} = -([aa]-[bb])\sin 2\psi + 2[ab]\cos 2\psi = 0$$

$$\frac{d[b'b']}{d\psi} = +([aa]-[bb]\sin 2\psi - 2[ab]\cos 2\psi = 0,$$

de unde rezultă

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2[ab]}{[aa]-[bb]}. \tag{468}$$

Această ecuaţie are două soluţii: una de forma 2ψ şi cealaltă de forma $2\psi \pm 180°$; prin urmare, ψ şi $\psi \pm 90°$, care dau două direcţii

perpendiculare între ele şi care corespund valorilor de maxim şi minim pentru m_x, respectiv m_y. Fără a preciza, pentru moment, care dintre direcţii corespunde minimului, respectiv maximului, notăm prin μ_1 şi μ_2 cele două valori ale lui m_x şi m_y care corespund unghiului ψ, rămînînd ca ulterior să precizăm care dintre ele corespunde valorii de maxim şi care corespunde valorii de minim.

Avînd în vedere că numitorul D nu este variabil cu ψ, îl scriem neexplicit şi avem

$$\left.\begin{aligned}&\text{(pentru } x')\ \mu_1^2 = m^2\frac{[b'b']}{D} = \frac{m^2}{D}\{[aa]\sin^2\psi + [bb]\cos^2\psi - 2[ab]\sin\psi\cos\psi\}\\ &\text{(pentru } y')\ \mu_1^2 = m^2\frac{[a'a']}{D} = \frac{m^2}{D}\{[aa]\cos^2\psi + [bb]\sin^2\psi - 2[ab]\sin\psi\cos\psi\}\end{aligned}\right\} \quad (469)$$

Transformăm sinusul şi cosinusul în funcţie de $\operatorname{tg} 2\psi$, ca să putem aplica formula (468); avem după formule cunoscute din trigonometrie

$$\sin^2\psi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\psi),\quad \cos^2\psi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\psi) \quad (470)$$

şi, prin urmare,

$$\cos 2\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{4[ab]^2}{([aa]-[bb])^2}}} = \frac{[aa]-[bb]}{W}, \quad (471)$$

unde am pus

$$W^2 = ([aa]-[bb])^2 + 4[ab]^2. \quad (472)$$

În mod analog se găseşte

$$\sin 2\psi = \frac{2[ab]}{W}. \quad (473)$$

Prin urmare, după (470), rezultă

$$\left.\begin{aligned}\sin^2\psi &= \frac{W-[aa]+[bb]}{2W}\\ \cos^2\psi &= \frac{W+[aa]-[bb]}{2W}.\end{aligned}\right\} \quad (474)$$

Înlocuind aceste valori în expresiile (469), se obţine

$$[a'a'] = \frac{1}{2}\{[aa]+[bb]+W\},\ [b'b'] = \frac{1}{2}\{[aa]+[bb]-W\}, \quad (475)$$

de unde rezultă

$$\mu_1^2=\frac{m^2}{2D}\{[aa]+[bb]-W\},\quad \mu_2^2=\frac{m^2}{2D}\{[aa]+[bb]+W\}. \quad (476)$$

Pentru control, observăm că după (470)

$$\mu_1^2+\mu_2^2=\frac{m^2}{D}\{[aa]+[bb]\}=M_p,$$

ceea ce era de aşteptat.

Trecem acum la rezolvarea problemei rămasă deschisă asupra precizării maximului şi minimului. În acest scop, ne fixăm asupra semnului mărimii W, dată de relaţia (471); luăm această mărime în valoare absolută, deci pozitivă. Pentru $\sin 2\psi$ şi $\cos 2\psi$ semnul îl determină cadranul în care este luat unghiul 2ψ. Acesta este însă fixat după relaţia (468), al cărei semn este determinat după valorile de la numărător şi numitor.

Condiţiile de realitate ne arată că parantezele $\{\ \}$, care figurează în expresiile (476), trebuie să fie pozitive; prin urmare, μ_1 corespunde minimului cu unghi de direcţie ψ, iar μ_2 maximului cu unghi de direcţie $\psi \pm 90°$.

Să notăm $\psi=\theta-90°$, $2\psi=2\theta-180°$,

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{-2[ab]}{-([aa]-[bb])}, \quad (477)$$

astfel încît, dacă ψ a fost unghiul de direcţie al minimului ψ_1, atunci θ va fi unghiul de direcţie al maximului μ_2. Luînd pe W în valoare absolută, avem

$$W=\sqrt{([aa]-[bb])^2+4[ab])^2}=\frac{-2[ab]}{\sin 2\theta}=\frac{-([aa]-[bb])}{\cos 2\theta},$$

astfel încît

$$\left.\begin{aligned} m_{max}^2&=m^2\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}=A^2, \text{ unghi de direcţie } \theta,\\ m_{min}^2&=m^2\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}=B^2 \text{ unghi de direcţie } \theta\pm 90°. \end{aligned}\right\} \quad (478)$$

Din aceste valori putem deduce, invers, erorile medii pătratice ale coordonatelor m_x şi m_y, admiţînd că axa absciselor face unghiul $\theta=\psi+90°$ cu direcţia în care valoarea erorii medii pătratice este maximă, m_{max}.

Avem după (458)

$$m_x^2=\frac{[bb]}{D}m^2,$$

adică, dezvoltat,

$$m_x^2 = m^2 \left\{ \frac{[aa]+[bb]+W}{4D} + \frac{[aa]+[bb]-W}{4D} + \right.$$
$$\left. + \frac{[aa]-[bb]}{2W} \cdot \frac{[aa]+[bb]-W-[aa]-[bb]-W}{2D} \right\}.$$

Ţinînd seama de expresia lui $\cos 2\psi$, dată de relaţia (471), avem

$$m_x^2 = m^2 \left\{ \frac{[aa]+[bb]+W}{2D} \cdot \frac{1-\cos 2\psi}{2} + \frac{[aa]+[bb]-W}{2D} \cdot \frac{1+\cos 2\psi}{2} \right\}.$$

Apoi, dacă avem în vedere relaţiile (474) şi (478), obţinem

$$m_x^2 = A^2 \sin^2\psi + B^2 \cos^2\psi,$$

Introducînd iarăşi unghiul $\theta = \psi + 90°$, rezultă în definitiv

$$\left.\begin{aligned} m_x^2 &= A^2 \cos^2\theta + B^2 \sin^2\theta \\ m_y^2 &= A^2 \sin^2\theta^2 + B^2 \cos^2\theta. \end{aligned}\right\} \qquad (479)$$

Prin urmare,

$$m_x^2 + m_y^2 = A^2 + B^2. \qquad (480)$$

Dacă luăm în plan un sistem de axe ortogonale şi dacă faţă de axa absciselor ca axă polară construim grafic curbele reprezentative ale mărimilor m_x^2 şi m_y^2 date de relaţiile (479), obţinem nişte curbe închise de tipul elipsei.

Pentru a pune în evidenţă această afirmaţie, să considerăm elipsa de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1, \qquad (481)$$

raportată la axale sale principale, cu semiaxele a, b (fig. 18), şi să scriem ecuaţia tangentei la această elipsă într-un punct al ei de coordonate (u, v)

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} = 1$$

sau

$$ub^2x + va^2y = a^2b^2,$$

ceea ce se mai scrie

$$\frac{ub^2x}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}} + \frac{va^2y}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}},$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă că

$$p=\frac{a^2b^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}} \tag{482}$$

este lungimea perpendicularei coborîte din centrul elipsei O pe tangenta în punctul $Q(u, v)$. Se verifică apoi că

$$\cos\theta=\frac{ub^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}, \quad \sin\theta=\frac{va^2}{\sqrt{u^2b^4+v^2a^4}}$$

şi, prin urmare,

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{v}{u}, \tag{483}$$

unde θ este unghiul format de perpendiculara OP la tangenta QP în punctul $Q(u, v)$ cu axa absciselor. Cu ajutorul acestei relaţii

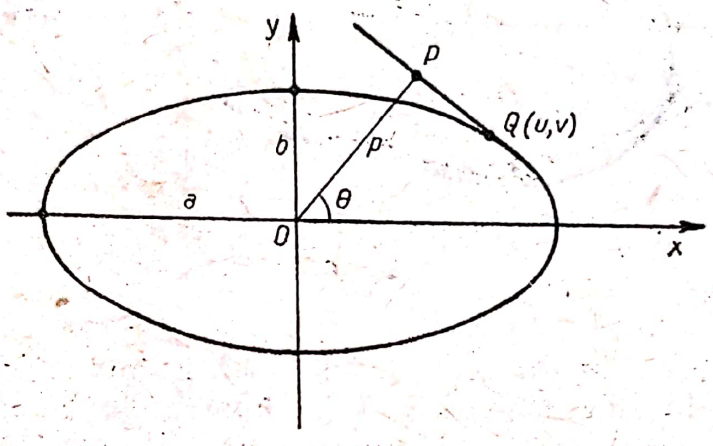


Fig. 18.

(483) şi ţinînd seamă că (u, v) satisface ecuaţia elipsei (481), putem exprima pe p şi v în funcţie de unghiul θ şi obţine de asemenea distanţa p în funcţie de θ.

Rezolvînd sistemul

$$\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1, \qquad \frac{v}{u}=\frac{b^2}{a^2}\operatorname{tg}\theta,$$

se obţine imediat

$$u^2=\frac{a^4}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\theta}, \qquad v^2=\frac{b^4\operatorname{tg}^2\theta}{a^2+b^2\operatorname{tg}^2\theta},$$

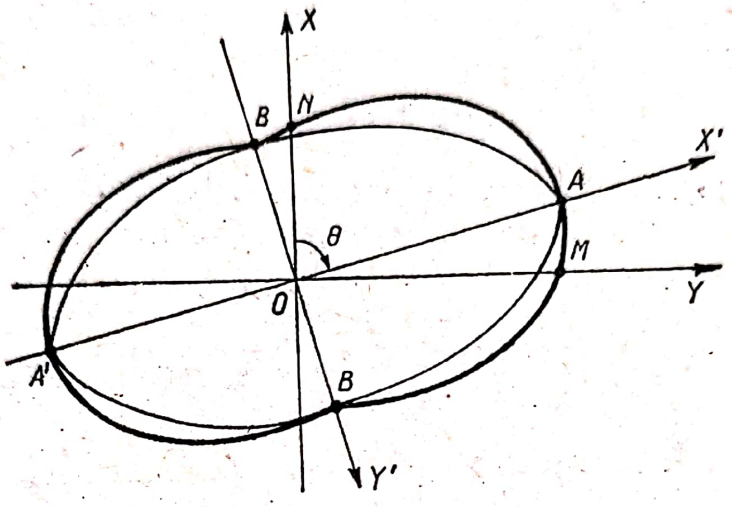
ceea ce introdus în relaţia (482) ne dă

$$p^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta, \tag{484}$$

care este ecuaţia parametrică a locului geometric al punctului P, piciorul perpendicularei din centrul elipsei pe tangentele la elipsă. Dacă înlocuim în expresia (484) mărimea p prin m_x, iar a şi b

prin A și B dați de relațiile (478), ecuația (484) se transformă exact în prima ecuație (479). Dacă, apoi, în loc de θ luăm $\theta+90°$ în (484), această relație se transformă în a doua relație (479) și ne dă valoarea lui m_y.

Prin urmare, erorile medii pătratice ale determinărilor punctului O, de coordonate x, y, pentru diferite direcții care pornesc din O, sînt date de lungimile vectorilor de poziție ai punctelor de



ig. 19.

pe curba erorilor medii, care este locul geometric al picioarelor perpendicularelor coborîte din O pe tangentele la *elipsa erorilor*, construită cu centrul în O și avînd ca valori ale semiaxelor valoarea maximă, respectiv minimă, a erorii medii pătratice a punctului O, direcțiile axelor elipsei erorilor fiind date de unghiul făcut cu abscisa, pentru care eroarea medie pătratică în punctul O este maximă, respectiv minimă (fig. 19).

În fig. 19 am orientat axele de coordonate așa cum se obișnuiește în geodezie, sistemul X, Y fiind orientat după direcțiile sistemului de coordonate inițial la care am raportat punctul $O(x, y)$, iar X', Y' fiind sistemul de coordonate corespunzător direcțiilor de maxim și minim al erorii medii pătratice, pe care construim elipsa erorilor cu axa mică egală cu m_{min} și axa mare egală cu m_{max}.

Din însăși definiția curbei erorilor, un punct de pe această curbă are coordonatele

$$X=p\cos\theta, \quad Y=p\sin\theta.$$

de unde rezultă

$$X^2+Y^2=p^2,$$

ceea ce înseamnă că distanța de la punctul O pînă la punctul $M(X=O)$ este $\overline{OM}=Y=p$, adică m_x și $\overline{ON}=X=m_y$.

Exemplu numeric. Pentru valorile coordonatelor unui punct geodezic O s-au găsit valorile luate dintr-o măsurătoare de pe teren

$$m=\pm 4{,}0'',\quad [aa]=+101,\quad [ab]=+48,\quad [bb]=+206.$$

Înlocuind aceste valori în formulele (477) și (478), găsim

$$\operatorname{tg} 2\theta=\frac{-2\times 48}{-(101-206)}=\frac{-96}{+105}=-0{,}9143,$$

de unde

$$2\theta=317°34',\qquad \theta=158°47'.$$

Apoi

$$W^2=(101-206)^2+4\times 48^2=+20\,241,\qquad W=+142{,}3,$$

$$D=+101\times 206-48\times 48=+18\,500,\qquad 2D=+37\,000;$$

$$\frac{[aa]+[bb]+W}{2D}=\frac{+449}{37\,000}=+0{,}01214,$$

$$\frac{[aa]+[bb]-W}{2D}=\frac{+165}{37\,000}=+0{,}00446;$$

$$A=4{,}0\cdot\sqrt{0{,}01214}=\pm 4{,}40\ \text{cm},$$

$$B=4{,}0\cdot\sqrt{0{,}00446}=\pm 2{,}67\ \text{cm}.$$

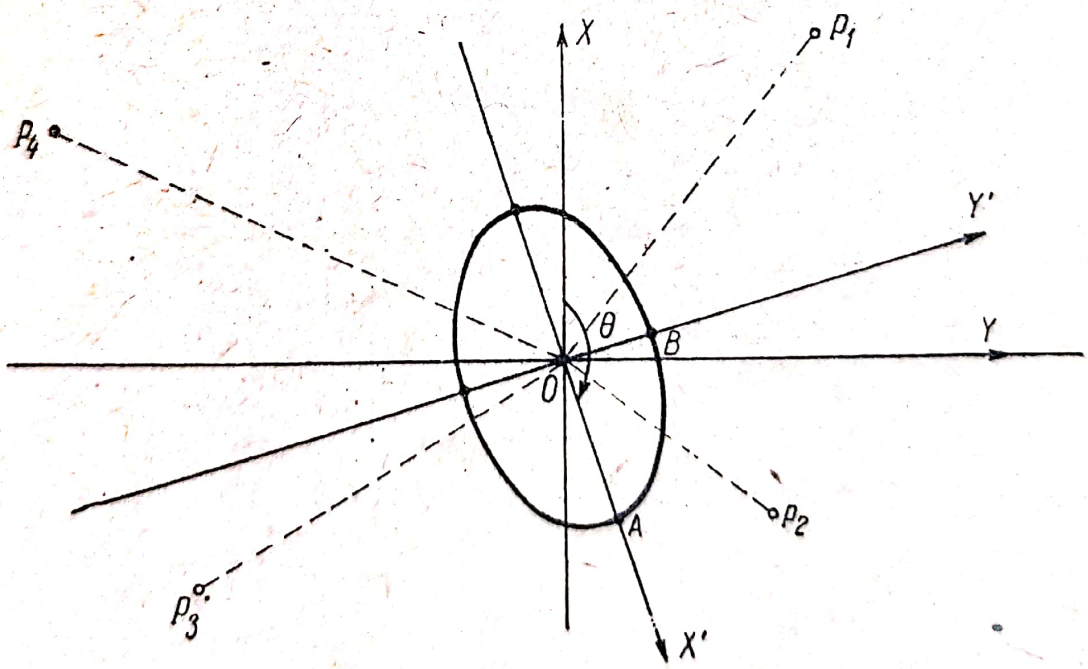


Fig. 20. $\overline{OA}=0{,}044$, $\overline{OB}=0{,}027$, $\theta=158°47'$.

Prin urmare, elipsa erorilor pentru punctul considerat este determinată de următoarele valori

$$A = \pm 0{,}044 \text{ m}, \quad B = \pm 0{,}027 \text{ m}, \quad \theta = 158°47'.$$

În fig. 20 redăm elipsa cu datele precedente și, pentru determinarea erorilor corespunzătoare diferitelor direcții în care s-au efectuat măsurătorile, sînt indicate și aceste direcții P_1, P_2, P_3, P_4 la o scară convenabil aleasă.

Dacă $A = B$, semiaxale elipsei sînt egale, iar aceasta degenerează în cerc; eroarea medie pătratică este atunci aceeași în toate direcțiile.

Remarcăm că am mai introdus elipsa erorilor în calculul probabilităților, pentru distribuția normală a erorilor. Considerațiile precedente stabilesc legătura între diferitele metode de lucru în calculul erorilor.

§ 150. Încheiere

Problemele tratate în această lucrare sînt suficiente, în cea mai mare măsură, pentru a se putea ataca chestiunile practice de măsurători și observații. Nu s-au înglobat în această expunere problemele referitoare la rețelele și lanțurile geodezice de triangulație, determinarea punctului prin compensări de coordonate, precizia unei triangulații și alte probleme care se pun în lucrările geodezice de diferite ordine. Acestea aparțin unei expuneri speciale de practică geodezică sau topografică. De asemenea, nu a fost cuprins aici studiul amănunțit al statisticii matematice cu problemele ei specifice de producție (recepții de loturi etc.). Totuși, cunoștințele din lucrarea de față permit abordarea unor astfel de probleme.

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. **M. Fréchet et R. Romann,** Représentation des lois empiriques des fo mules approchées, Paris, 1930.
2. **N. St. Georgescu-Roegen,** Metoda statistică, București, 1933.
3. **W. Jordan u. O. Eggert,** Handbuch der Vermessungskunde, B. I, Stuttgart, 1935.
4. **O. Onicescu** și **Gh. Mihoc,** Calculul probabilităților, București. 1939.
5. И. М Герасимов, Практическое руководство по вычислению триангуляций, Moscova, 1941,
6. М. Д. Бонч-Бруевичи и А. Казанко, физическая геодезия (теория ошибок), Moscova, 1949.
7. М. Ф. Маликов, Основы метрологий, Moscova, 1949.
8. **Dr. Ing. K. Käntsch.** Genauigkeit von Messung und Messgerät, München, 1950.
9. А. М. Длин, математическая статистика в технике, Moscova, 1951.
10. В. И. Романовский, математическая статистика, Moscova, 1952.
11. В. А. Романов, теория ошибок и способ наименьших квадратов, Moscova, 1952.
    1950.
12. **Maria G. Salvadori,** Numerical Methods in Engineering, New-York, 1952.
13. **Gh. Mihoc.** Elemente de calculul probabilităților. Editura Tehnică, București, 1954.
14. А. И. Кобылин, трупповое уравнивание рудничной триантуляций Moscova, 1955.
15. **O. Onicescu,** Calculul probabilităților, Editura Tehnică, București 1956.
16. **I. V. Dunin-Barkovski** și **N, V. Smirnov,** Teoria probabilităților și statistica matematică în tehnică, I. D. T. București, 1955.
17. STAS 2810-51.
18. STAS 2872-51.
19. STAS 2631-51.
20. Lexiconul Tehnic Romîn, Editura Tehnică, București Ed. I.

Scanned with OKEN Scanner

TABLA DE MATERII

Prefață 3

I. Teoria erorilor de măsurare

Cap. I. *Erori de măsurare. Clasificare* 5
§ 1. Considerații generale 5
§ 2. Eroni grosolane (greșeli) 6
§ 3. Erori sistematice 7
§ 4. Erori întîmplătoare 8
§ 5. Caracteristicile erorilor întîmplătoare în măsurători 9
§ 6. Operația de măsurare. Valoarea de referință 11
§ 7. Eroarea unei măsuri terminale (cu capete) 12
§ 8. Eroarea unei măsuri cu scară gradată 13
§ 9. Eroarea unui aparat de măsurat cu ac indicator 13
§ 10. Eroarea valorii măsurate prin măsurători indirecte (comparative) . 14
§ 11. Formulare generală. Eroare reală. Corecție 15
§ 12. Principiul mediei aritmetice 16
§ 13. Eroare medie. Abatere. Precizia unei măsurători 17
§ 14. Metoda celor mai mici abateri (în valoare absolută). Mediană . 20
§ 15. Formule pentru mediană 26
§ 16. Modul (M_0) sau dominanta 30
§ 17. Metoda celor mai mici pătrate 31
§ 18. Eroarea medie pătratică 33
§ 19. Eroare limită. Prag de siguranță. Eroare probabilă. Eroare relativă . 35
§ 20. Propagarea erorilor independente 36
§ 21. Funcție liniară 40
§ 22. Funcție generală 41
§ 23. Eroarea medie pătratică a mediei aritmetice 44
§ 24. Eroarea medie pătratică a erorii medii pătratice individuale . . 46
§ 25. Eroarea cea mai probabilă (eroare aparentă sau reziduală) . . 47
§ 26. Propagarea erorilor sistematice 53
§ 27. Exemple numerice luate din practică 54
§ 28. Prelucrarea practică a unui șir de măsurători de egală precizie, ținînd seama de „rotunjirea" rezultatelor 56
§ 29. Operația de „rotunjire" și noțiunea de precizie 58
§ 30. Principiul măsurătorilor ponderate 59
§ 31. Proprietăți ale ponderilor deduse din teoremele asupra erorii medii pătratice 65
§ 32. Proprietățile erorilor aparente ponderate 67

Scanned with OKEN Scanner

§ 33. Ponderea mediei aritmetice ponderate 68
§ 34. Introducerea ponderii unitate 69
§ 35. Exemple 70
§ 36. Eroarea medie pătratică a unei măsurători care are ponderea egală cu unitatea 71
§ 37. Eroarea melie pătratică a valorii medii a ponderilor individuale . 72
§ 38. Alte formule pentru eroarea medie pătratică a mediei ponderate . 72
§ 39. Expresia erorii medii pătratice a unității de pondere μ și a mediei ponderate $\mathcal{M}$ în funcție de erorile aparente ale măsurătorilor de inegală precizie 73
§ 40. Prelucrarea practică a unui șir de măsurători de inegală precizie. Formulele de control 75
§ 41. Influența suprapusă a erorilor întîmplătoare și a erorilor sistematice asupra măsurătorilor 79
§ 42. Determinarea erorii medii pătratice a unui șir de măsurători duble de aceeași precizie 81
§ 43. Determinarea erorii medii pătratice a unității de pondere cu ajutorul unui șir de măsurători duble și de precizii inegale 85

Cap. II. *Exemple de aplicație a teoriei erorilor în practică* 87

§ 44. Precizie de măsurare și precizie de citire 87
§ 45. Aplicarea teoriei erorilor la măsurătorile cu teodolitul . . . 90
§ 46. Eroarea medie pătratică de măsurare a unei distanțe 91
§ 47. Mărimea medie a deplasării extremității unei distanțe măsurate, datorită erorilor de măsurare a lungimii și a direcției . . . 93
§ 48. Aplicarea teoriei erorilor în nivelmentul geometric. Distanța normală de la nivelă la mira 94
§ 49. Eroarea medie pătratică a unei diferențe de nivel 94
§ 50. Aplicarea teoriei erorilor în ridicările cu planșeta, folosind fire stadimetrice 95
§ 51. Erorile medii pătratice ale diferențelor de nivel date prin formula nivelmentului trigonometric 96
§ 52. Eroarea medie pătratică în determinarea diferențelor de nivel la o drumuire 98
§ 53. Introducerea noțiunii de „compensare" 99

II. Noțiuni de teoria probabilităților și statistică matematică

Cap. I. *Proprietăți elementare* 104

§ 54. Noțiunea de probabilitate 104
§ 55. Probabilitate matematică 105
§ 56. Observații 106
§ 57. Cîmp de evenimente 107
§ 58. Exemple de numărare probabilistă. Problema alternativei . . . 107
§ 59. Caracterizarea evenimentelor 109
§ 60. Probabilități totale de evenimente elementare 110
§ 61. Probabilitatea unui eveniment compus 112
§ 62. Consecințe 113
§ 63. Teoreme și formule utile 113
§ 64. Distribuția a două evenimente contrare prin probe repetate (distribuția binomială) 118
§ 65. Calculul valorii asimptotice a lui P_k Legea lui Laplace-Gauss . 120

§ 66. Legea evenimentelor rare. Formula lui Poisson 123
§ 67. Noţiuni elementare de statistică matematică 123
§ 68. Colectivităţi statistice. Distribuţia unei colectivităţi statistice . . 124
§ 69. Distribuţia unei colectivităţi cu repartiţie continuă 126
§ 70. Funcţia de distribuţie şi funcţia de densitate în cazul unei variabile continue 127
§ 71. Noţiunea statistică de probabilitate 129
§ 72. Cîteva definiţii 130
§ 73. Noţiunea de dependenţă funcţională şi dependenţă statistică . . 130
§ 74. Noţiunea de frecvenţă a unui eveniment dat 132
§ 75. Valori medii în cazul distribuţiilor discrete 132
§ 76. Cîteva proprietăţi ale momentelor 134
§ 77. Noţiunea de „speranţă matematică" 137
§ 78. Speranţă matematică condiţionată 138
§ 79. Funcţia caracteristică 140
§ 80. Abatere în sens probabilist. Abatere redusă 141
§ 81. Funcţia $\theta(\alpha)$ 144
§ 82. Valori medii în cazul variabilei continue 145
§ 83. Abatere probabilă. Abatere mediană. Abatere medie pătratică . . 147
§ 84. Inegalitatea lui P. L. Cebîşev 148
§ 85. Teorema lui Bernoulli. Legea numerelor mari 150
§ 86. Observaţii asupra convergenţei frecvenţelor statistice 155
§ 87. Probabilităţile cauzelor. Teorema lui Bayes 156

Cap. II. *Teoria probabilităţilor şi erorile de măsurare* 159

§ 88. Legea împrăştierii erorilor întîmplătoare 159
§ 89. Legea distribuţiei normale, după Gauss 161
§ 90. Determinarea constantei h, numită „măsura preciziei" 164
§ 91. Relaţia dintre măsura preciziei, eroarea medie pătratică şi eroarea medie 165
§ 92. Eroarea probabilă ρ şi relaţia dintre această eroare şi eroarea medie pătratică m 167
§ 93. Ponderea unei măsurători 168
§ 94. Observaţie asupra punctelor de inflexiune ale curbei de densitate . 170
§ 95. Comparaţia experienţei cu teoria 171
§ 96. Combinarea mai multor legi de distribuţie normală independente, cu parametri de precizie diferiţi 171
§ 97. Distribuţia normală în cazul mai multor dimensiuni. Problema reglării tirului 175
§ 98. Elipsa de egală probabilitate şi elipsa probabilă 177
§ 99. Calculul practic al poziţiilor elipselor 179

Cap. III. *Variabile aleatorii corelate* 182

§ 100. Corelaţia caracteristicilor 182
§ 101. Formularea matematică a legii distribuţiilor normale corelate. Legea lui Gauss-Bravais 185
§ 102. Coeficient de corelaţie 189
§ 103. Observaţie asupra criteriului de corelaţie 192
§ 104. Eroarea medie pătratică a unei funcţii liniare de variabile corelate 194
§ 105. O problemă referitoare la dezvoltarea unei baze geodezice cu maximum de precizie 195

III. Metoda celor mai mici pătrate

§ 106. Principiul metodei și socpul ei 200
§ 107. Ecuațiile erorilor 200
§ 108. Reducerea funcțiilor f la forma liniară 203
§ 109. Sistemul ecuațiilor normale 205
§ 110. Dezvoltarea calculului pentru trei necunoscute. Formarea ecuațiilor normale 205
§ 111. Rezolvarea ecuațiilor normale. Metoda lui Gauss 207
§ 112. Calcule de control pentru stabilirea și rezolvarea ecuațiilor normale 211
§ 113. Determinarea ponderilor și erorilor medii pătratice ale valorilor necunoscutelor obținute prin rezolvarea ecuațiilor normale . . 214
§ 114. Determinarea erorii medii pătratice a măsurătorilor 224
§ 115. Formulele de control ale lui Lüroth și Fechner 227
§ 116. Calculul sumei pătratelor erorilor aparente 228
§ 117. Calculul cu valori rotunjite ale necunoscutelor 229
§ 118. Determinarea valorilor cele mai probabile ale necunoscutelor din măsurători indirecte, de precizii diferite 230
§ 119. Determinarea erorii medii pătratice a unei funcții liniare de necunoscute ale căror valori se calculează indirect, din ecuațiile erorilor 232
§ 120. Determinarea erorii medii pătratice a unei funcții liniare de funcții care sînt, la rîndul lor, funcții de necunoscute ale căror valori se calculează indirect 238
§ 121. Scheme pentru rezolvarea ecuațiilor normale și reduse . . . 240
§ 122. Aplicație practică de rezolvare a ecuațiilor normale în cazul măsurătorilor de precizii inegale. Rețea de nivelment 267
§ 123. Eliminarea prin metoda Schreiber 273
§ 124. Metoda aproximațiilor succesive 276
§ 125. Metoda ecuațiilor fictive, după Cholesky 278
§ 126. Rezolvarea sistemelor de ecuații normale prin metoda relaxării, după Southwell 281
§ 127. Apariția și evaluarea numărului de ecuații de condiție într-o problemă de triangulație 286
§ 128. Determinări condiționate, cu egală precizie, reduse la determinări indirecte 292
§ 129. Compensarea necunoscutelor determinate direct, cu egală precizie, dar supuse la ecuații de condiție, prin metoda corelatelor . . 299
§ 130. Compensarea necunoscutelor determinate direct, cu precizii diferite, supuse la ecuații de condiție 301
§ 131. Calculul sumei pătratelor erorilor aparente $[vv]$ 304
§ 132. Ponderea unei funcții de valori compensate ale necunoscutelor în compensarea condiționată 306
§ 133. Reducerea ecuațiilor de condiție neliniare la forma liniară . . 312
§ 134. Aplicații practice 314
§ 135. Compensări parțiale 332
§ 136. Ecuații de condiție reduse 334
§ 137. Compensări pe două grupe, cu ecuații de condiție transformate. Metoda Krüger 336
§ 138. Aplicație în geodezie (Urmaev) 342
§ 139. Metoda de compensare pe trei grupe (Kobilin) 354
§ 140. Determinarea necunoscutelor rezultate din măsurători indirecte și supuse la relații de condiție, care trebuie să fie satisfăcute riguros . 361
§ 141. Compensare prin descompunere în două etape 363
§ 142. Compensarea a doua, prin corelate 366

§ 143. Calculul sumei pătratelor erorilor aparente și al erorii medii pătratice 368
§ 144. Ponderea unei funcții, după compensarea necunoscutelor, în metoda compensării prin două etape 370
§ 145. Determinări indirecte, cu ecuații de condiție parțiale 372
§ 146. Ecuațiile erorilor cu mai multe mărimi măsurate 373
§ 147. Eroarea medie pătratică într-un punct și elipsa erorilor . . . 384
§ 148. Eroarea medie pătratică a punctului 385
§ 149. Curba erorilor. Elipsa erorilor 387
§ 150. Încheiere 394

Bibliografie 395

519.2

BIBLIOTECA CENTRALĂ
REGIONALĂ
IAȘI

Recenzent: Prof. ing. R. Filimon
Control științific: Prof. Gh. Mihoc, membru coresp. al Acad. R.P.R.
Responsabil de carte: Nelcov Valentina
Tehnoredactor: Bălăiță Titel
Corector responsabil: Băluș Luiza

Dat la cules 10. 10. 1957. Bun de tipar 26. 12. 1957. Hîrtie cărți școlare de 65 g/m², 61×86/16. Coli editoriale 21,05. Coli de tipar 25. Comanda T 3841. A 566; E 14550. Indicele de clasificare pentru bibliotecile mari 519.25. Pentru bibliotecile mici 519

Tiparul executat la
Intreprinderea Poligrafică Sibiu, str. I. V. Stalin 15 — R. P. R.